

"... Um profissional de qualquer campo da computação não deve considerar o computador como uma caixa preta que executa programas por mágica." (IEEE/ACM Computer Science Curriculum, 2008)

Mapas de karnaugh

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

Mapas de Karnaugh

Método gráfico para

Simplificar equações booleanas

Converter tabelas verdade em suas respectivas equações

Mostra a mesma informação que a tabela verdade

Mapas de Karnaugh

Método gráfico para

Simplificar equações booleanas

Converter tabelas verdade em suas respectivas equações

Mostra a mesma informação que a tabela verdade

Na teoria serve para problemas envolvendo qualquer número de variáveis

Na prática, problemas com mais de 5 variáveis se tornam difíceis de serem resolvidos por humanos

Uma quantidade relativamente pequena de variáveis (e.g., 32) pode ser impraticável mesmo para uma máquina

Exemplo

Tabela verdade

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

→ $\bar{A}\bar{B}$

→ AB

Mapa de Karnaugh

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	1 → $\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1 → $\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\overline{C}$
1	1	1	0

Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	1 → $\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1 → $\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\overline{C}$
1	1	1	0

Mapa de Karnaugh

	\overline{C}	C
$\overline{A}\overline{B}$	1	1
$\overline{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\overline{B}$	0	0

Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1 → $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 → $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 → $ABCD$

Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1 → $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 → $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 → $ABCD$

Mapa de Karnaugh

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Construção do Mapa

Exemplo com 4 variáveis

Cada nova coluna deve diferir por apenas uma variável da coluna anterior.

Comece pelos valores negados.

Cada nova linha deve diferir por apenas uma variável da linha anterior.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
AB				
$A\bar{B}$				

Coloque os valores da tabela verdade aqui

Faça você mesmo

Qual o mapa de Karnaugh para
F considerando a tabela
verdade ao lado ?

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Faça você mesmo

Qual o mapa de Karnaugh para
F considerando a tabela
verdade ao lado ?

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Adjacências

Blocos que **diferem por apenas uma variável** são considerados **adjacentes**





Considera-se que os blocos estão “enrolados” (*wrapped*)

Blocos do topo são vizinhos dos blocos inferiores, e vice-versa

Blocos da esquerda são vizinhos dos da direita, e vice-versa

Exemplo

Alguns exemplos de adjacências

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
AB				
$A\bar{B}$				


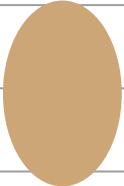






Exemplo

Alguns exemplos de adjacências

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
AB				
$A\bar{B}$				

Exemplo

Alguns exemplos de adjacências

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
AB				
$A\bar{B}$				

Agrupamentos

A ideia é agrupar os 1's que aparecem no mapa de maneira adjacente

Também é possível agrupar 0's, mas vamos ver apenas com 1's

Variáveis que aparecem em ambas as formas (normal e negada) podem ser descartadas da expressão final

Exemplo

	\bar{c}	c
$\bar{a}b$	0	0
$\bar{a}\bar{b}$	1	0
ab	1	0
$a\bar{b}$	0	0

(a)

Exemplo

No agrupamento temos A e \bar{A}

Logo, A pode ser ignorado na expressão final

A expressão simplificada contém apenas B e \bar{C} , que não mudam no agrupamento

$$F = B\bar{C}$$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

(a)

Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	1
AB	0	0
$A\bar{B}$	0	0

(a)

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	0	0
$A\bar{B}$	1	0

(b)

Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

a) $\bar{A}.B$

b) $\bar{B}.\bar{C}$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	1
AB	0	0
$A\bar{B}$	0	0

(a)

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	0	0
$A\bar{B}$	1	0

(b)

Quartetos

Se possível, faça quartetos de 1's

O princípio é o mesmo

Elimina-se as variáveis que aparecem em suas formas não-negadas e negadas no quarteto

Exemplo:

$$F = C$$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	1
$\bar{A}B$	0	1
$A\bar{B}$	0	1
AB	0	1

Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(c)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(d)

Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

- a) $F = A.B$ b) $F = B.D$ c) $F = A.\bar{D}$ d) $F = \bar{B}.\bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(c)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(d)

Octetos

Para quatro variáveis, existe ainda a possibilidade de octetos de 1's existirem
Nesse caso 3 variáveis são eliminadas

Exemplo

$$F = B$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

a) $F = \bar{C}$ b) $F = \bar{B}$ c) $F = \bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
AB	1	1	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(c)

Processo de Simplificação

Faça o Mapa de Karnaugh

Marque os agrupamentos

... Octetos, quartetos, duetos, variáveis sozinhas

Sempre faça os maiores agrupamentos possíveis

Faça a soma (OR) de cada um dos agrupamentos encontrados

Elimine as variáveis que aparecem da forma negada e não negada em cada agrupamento

Faça você mesmo

Qual a expressão simplificada do primeiro exercício apresentado nos slides? O Mapa de Karnaugh do exercício é apresentado a seguir:

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

Faça você mesmo

Qual a expressão simplificada do primeiro exercício apresentado nos slides? O Mapa de Karnaugh do exercício é apresentado a seguir:

$$F = \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + B.D + A.C.D$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0 ₁	0 ₂	0 ₃	1 ₄
$\bar{A}B$	0 ₅	1 ₆	1 ₇	0 ₈
AB	0 ₉	1 ₁₀	1 ₁₁	0 ₁₂
$A\bar{B}$	0 ₁₃	0 ₁₄	1 ₁₅	0 ₁₆

Don't Care

Algumas vezes determinada combinação de variáveis gera um resultado irrelevante

Não nos importamos (*don't care*) se a saída da função F é 0 ou 1 para determinada condição

Nesses casos basta inserir um X nas tabelas verdade ou mapas de Karnaugh

Ao simplificar o circuito, você pode escolher se é 0 ou 1

Escolha o que trazer a melhor simplificação

A escolha nem sempre é simples

Don't Care

A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(a)

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
AB	1	1
$A\bar{B}$	x	1

(b)

Don't Care

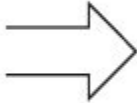
A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

} "don't care"

(a)

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
AB	1	1
$A\bar{B}$	x	1

(b)



	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	1	1
$A\bar{B}$	1	1

} z = A

(c)

Limitações

Para mais que 6 variáveis, os Mapas de Karnaugh se tornam complicados para humanos resolverem

Podemos criar programas que resolvem os mapas, mas isso também tem suas limitações

Uma implementação ingênua que armazena o mapa inteiro na memória:

- Considerando que cada posição do mapa ocupa 1 bit na memória

- Para 30 variáveis o mapa ocupará 128 MiB

Limitações

Para mais que 6 variáveis, os Mapas de Karnaugh se tornam complicados para humanos resolverem

Podemos criar programas que resolvem os mapas, mas isso também tem suas limitações

Uma implementação ingênua que armazena o mapa inteiro na memória:

Considerando que cada posição do mapa ocupa 1 bit na memória

Para 30 variáveis o mapa ocupará 128 MiB

Para 40 variáveis o mapa ocupará 128 GiB

Encontrar os agrupamentos em espaços de busca tão grandes se torna complicado e lento!

Exercícios

1. Faça o Mapa de Karnaugh para o primeiro exercício da aula passada e gere a expressão simplificada. Noque que algumas coisas não são diretamente visíveis em Mapas de Karnaugh, como a última distributiva que pode ser aplicada.
2. Dados os Mapas de Karnaugh a seguir, dê as expressões simplificadas.

	\bar{C}	C
$\bar{A}.\bar{B}$	0	0
$\bar{A}.B$	0	0
A.B	1	X
A. \bar{B}	1	1

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	C.D	C. \bar{D}
$\bar{A}.\bar{B}$	0	0	1	0
$\bar{A}.B$	1	1	X	X
A.B	1	1	0	0
A. \bar{B}	0	0	0	0

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	C.D	C. \bar{D}
$\bar{A}.\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}.B$	0	1	1	1
A.B	1	1	1	0
A. \bar{B}	0	0	1	0

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	C.D	C. \bar{D}
$\bar{A}.\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}.B$	0	1	1	1
A.B	0	0	0	1
A. \bar{B}	1	1	0	1

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	C.D	C. \bar{D}
$\bar{A}.\bar{B}$	1	1	0	1
$\bar{A}.B$	1	1	0	1
A.B	1	1	0	1
A. \bar{B}	1	1	1	1

Exercícios

3. Dadas as tabelas verdade a seguir, faça os Mapas de Karnaugh e dê as expressões simplificadas para as funções F.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

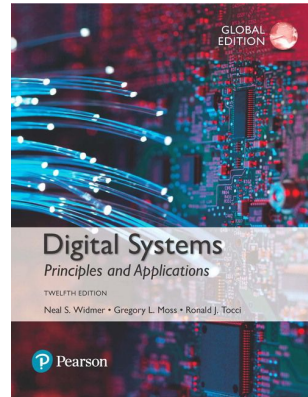
A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Exercícios

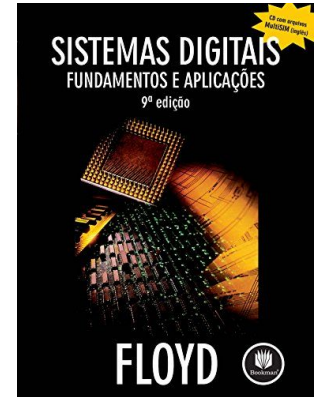
4. Faça os Mapas de Karnaugh para as demais funções da lista de exercícios da aula passada, e simplifique utilizando os mapas.

Referências

Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



Licença

Este obra está licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

