"A matemática requer uma pequena dose, não de genialidade, mas de liberdade de imaginação, que em uma dose maior, seria insanidade" (Angus K. Rodgers)

Álgebra de Boole

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

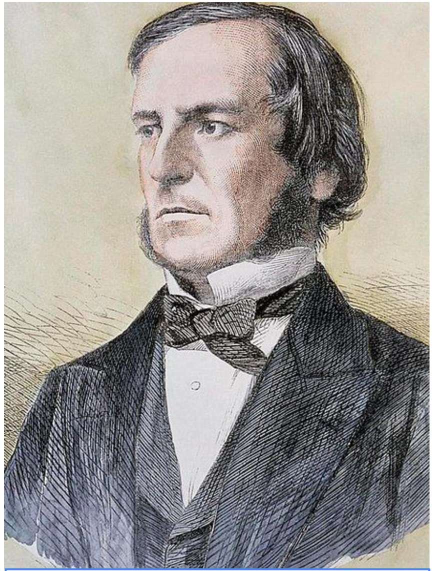
Trechos da aula baseados na aula do Professor Marco Zanata -> https://web.inf.ufpr.br/mazalves

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Álgebra de Boole

Na álgebra de Boole variáveis e constantes podem assumir apenas os valores **verdadeiro** ou **falso**.

Temos uma relação direta com nossos circuitos lógicos



George Boole (02/11/1815 - 08/12/1864) foi um matemático, filósofo e lógico britânico, criador da álgebra booleana, fundamental para o desenvolvimento da computação moderna.

en.wikipedia.org/wiki/George_Boole

Álgebra de Boole

Uma **variável booleana** geralmente é denotada por uma letra maiúscula (A, B, C, ...)

Pode assumir um dos dois valores da álgebra de boole

Você vai encontrar esses valores denotados de diversas formas:

- Falso e Verdadeiro
- F e V
- 0 e 1
- F e T
- desligado e ligado
- baixo e alto
- ...

Princípios Básicos

Dois princípios fundamentais:

Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser, simultaneamente, verdadeira e falsa;

Princípio do terceiro excluído: Uma proposição só pode assumir um dos dois valores possíveis: verdadeira ou falsa, excluindo-se uma terceira hipótese.

Álgebra de Boole

Temos três operações básicas

Negação

Conjunção -> *e lógico*

Disjunção -> *ou lógico*

Negação

A negação de uma variável X nega o seu estado

- Se X é 0, sua negação deve ser 1
- Se X é 1, sua negação deve ser 0

Negação

A negação de uma variável X nega o seu estado

Se X é 0, sua negação deve ser 1

Se X é 1, sua negação deve ser 0

Algumas representações possíveis

$\overline{X}$

$\neg X$

não X

not X

Tabela verdade

Para determinado conjunto de variáveis, uma tabela verdade representa todas as combinações possíveis dessas variáveis, e a resposta gerada por cada combinação

Tabela verdade da negação

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Conjunção

Considerando duas variáveis X e Y, a conjunção

Resulta em 1 se X **e** Y forem 1

Resulta em 0 nos demais casos

Comumente chamamos a conjunção de ***e lógico***

Conjunção

Considerando duas variáveis X e Y, a conjunção

Resulta em 1 se X **e** Y forem 1

Resulta em 0 nos demais casos

Comumente chamamos a conjunção de ***e lógico***

Algumas representações possíveis

X.Y

X *e* Y

X *and* Y

$X \wedge Y$

Tabela verdade

A tabela verdade para a negação tinha duas linhas, mostrando todas as combinações possíveis de uma variável (0 ou 1)

Mas e com duas variáveis, quantas combinações temos?

X	Y	X.Y
...	...	...

Tabela verdade da conjunção

X	Y	X.Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabelas verdade

E para o caso geral, com *n* variáveis, quantas combinações existem em uma tabela verdade?

A	B	C	...
...	...	...	...

Tabelas verdade

E para o caso geral, com *n* variáveis, quantas combinações existem em uma tabela verdade?

A tabela terá 2^n linhas (combinações)

A	B	C	...
...	...	...	...

Disjunção

Considerando duas variáveis X e Y, a disjunção

Resulta em 1 se X ou Y, ou ambos forem 1

Resulta em 0 caso contrário

Comumente chamamos a conjunção de ***ou lógico***

Disjunção

Considerando duas variáveis X e Y, a disjunção

Resulta em 1 se X ou Y, ou ambos forem 1

Resulta em 0 caso contrário

Comumente chamamos a conjunção de ***ou lógico***

Algumas representações possíveis

$X + Y$

X ou Y

X or Y

$X \vee Y$

Tabela verdade da disjunção

X	Y	X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Expressões

Podemos combinar as operações, formando expressões lógicas.

Expressões

Podemos combinar as operações, formando expressões lógicas.

Como na álgebra convencional, precisamos respeitar a precedência dos operadores

A precedência é, da maior prioridade para a menor:

Parêntesis ( )
Negação
Conjunção
Disjunção

Exemplo

Qual é o valor lógico de F na expressão a seguir

$F = \overline{0} + 0.\overline{0}$

Faça você mesmo

Qual o valor lógico das expressões a seguir?

$F = 1{+}0.1$

$G = 0.1{+}0$

$H = 0 + \overline{0.1}$

Cuidado! A negação está negando 0.1 simultâneamente, então você vai precisar resolver 0.1 primeiro, para depois negar.

Faça você mesmo

Qual o valor lógico das expressões a seguir?

$F = 1 + 0.1 = 1$

$G = 0.1 + 0 = 0$

$H = 0 + \overline{0.1} = 1$

Funções

Como na álgebra convencional, podemos definir uma função com variáveis

Exemplo

$F(X,Y) = \overline{X}.Y + X.\overline{Y}$

Qual o resultado da função F quando $X = 1$ e $Y = 0$

Funções

Como na álgebra convencional, podemos definir uma função com variáveis

Exemplo

$F(X,Y) = \overline{X}.Y + X.\overline{Y}$

Qual o resultado da função F quando $X = 1$ e $Y = 0$

$F = \overline{1}.0 + 1.\overline{0} = 1$

Tabelas verdade de funções

É possível avaliar todos os resultados possíveis de uma função utilizando uma tabela verdade

Exemplo para $F(X,Y) = \overline{X}.Y + X.\overline{Y}$

Tabelas verdade de funções

É possível avaliar todos os resultados possíveis de uma função utilizando uma tabela verdade

Exemplo para $F(X,Y) = \overline{X}.Y + X.\overline{Y}$

X	Y	$\overline{X}.Y$	$X.\overline{Y}$	F
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Tabelas verdade de funções

É possível avaliar todos os resultados possíveis de uma função utilizando uma tabela verdade

Exemplo para $F(X,Y) = \overline{X}.Y + X.\overline{Y}$

Colocar resultados intermediários
na tabela verdade pode ajudar.

X	Y	$\overline{X}.Y$	$X.\overline{Y}$	F
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Disjunção Exclusiva

Considerando duas variáveis X e Y, a **disjunção exclusiva**, ou ***ou exclusivo***, ou ainda ***xor***

Resulta em 1 se X ou Y é um, mas ambos não podem ser 1 ao mesmo tempo

Resulta em 0 caso contrário

A disjunção exclusiva pode ser expressa via operações básicas: $F(X,Y) = \overline{X}.Y + X.\overline{Y}$

Algumas representações possíveis

$X \oplus Y$

X *xor* Y

Tabela verdade da disjunção exclusiva

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Precedência

A precedência é a seguinte, da maior prioridade para a menor

Parêntesis ( )

Negação

Conjunção

Disjunção

Disjunção exclusiva

Faça você mesmo

Faça a tabela verdade para $F(A,B,C) = A + \overline{B}.C$

Faça você mesmo

Faça a tabela verdade para $F(A,B,C) = A + \overline{B}.C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Faça você mesmo

Tente determinar a função F que gera a seguinte tabela verdade

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Faça você mesmo

Tente determinar a função F que gera a seguinte tabela verdade

Notou que a tabela é a negação de um ***xor***?

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$F(X,Y) = \overline{X \oplus Y}$

xnor

A negação de um xor também tem um nome especial

- Chamamos de **xnor** (negação da disjunção exclusiva)
- A disjunção exclusiva pode ser expressa via operações básicas: $F(X,Y) = X.Y + \overline{X}.\overline{Y}$

Representação

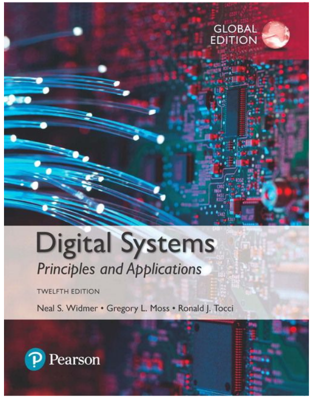
- $\overline{X \oplus Y}$

Exercícios

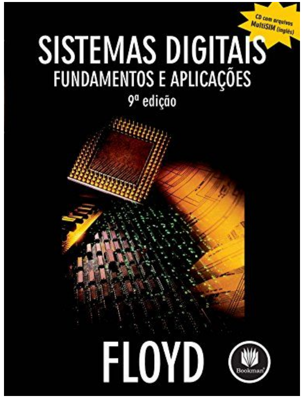
1. Faça as tabelas verdade para as seguintes funções
   a. $(A + B).(\overline{B} + C)$
   b. $A + B.C + \overline{D}$
   c. $\overline{A}.B \oplus A.\overline{B}$
2. Uma forma de se provar a equivalência entre funções booleanas é criando-se uma tabela verdade para cada função. Se ambas funções gerarem o mesmo resultado para todas as possibilidades, elas são equivalentes. Sabendo disso, prove se as seguintes expressões são equivalentes ou não:
   a. $A.(B+C) = A.B + A.C$ -> Se você provar isso, demonstrará que a distributiva para duas variáveis também é válida na Álgebra de Boole
   b. $\overline{A}+\overline{B} = \overline{A+B}$

Referências

Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



Licença