Método da Secante

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- O Método da Secante

1 Método da Secante

Secante: Uma reta secante a uma curva é qualquer reta que cruza dois ou mais dos seus pontos.

Uma desvantagem do método de Newton-Rhapson é a necessidade de se obter $f'(x)$.

Uma forma de contornar o problema é substituir a derivada $f'(x)$ pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações para a raiz. Sendo assim, no início do método são necessárias duas aproximações para a raiz.

Dica

Pelo Quociente de Newton, a derivada de uma função no ponto x é dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

Note que h é uma "distância" que separa os dois pontos, e essa distância tende a zero. Veja a semelhança entre a aproximação pela secante com a definição da derivada.

A função de iteração então fica:

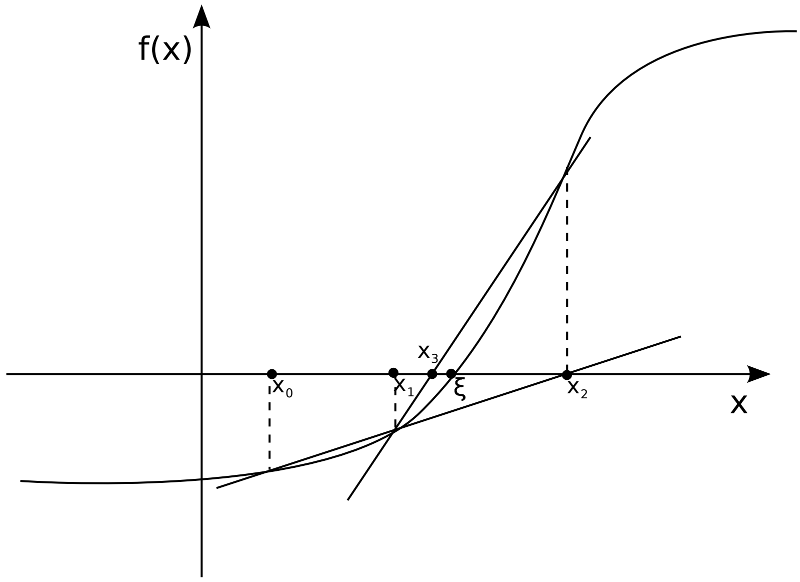
$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

Simplificando:

$$\varphi(x) = x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Motivação Geométrica

A cada iteração, o ponto x_{k+1} é a abcissa do ponto de interseção do eixo x com a reta secante que passa por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$:



Observação: A raiz não está no intervalo entre x_0 e x_1 na imagem, porém ambos podem ter sido retirados do intervalo I que continha a raiz.

Exemplo 1:

Considerando $f(x) = x^2 + x - 6; x_0 = 1.5; x_1 = 1.7$

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1.5(-1.41) - 1.7(-2.25)}{-1.41 + 2.25} = 2.03571$$

$$x_3 = \frac{1.7(0.17983) - 2.03571(-1.41)}{0.17983 + 1.41} = 1.99774$$

$$x_4 = 1.99999$$

Estamos tendendo a 2, que é uma raiz da função.

Critérios de Convergência

Os mesmos usados no método de Newton-Raphson.

Além disso, o método pode divergir se $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$.

Critérios de Parada

$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$ ou se $|f(x_k)| < \varepsilon_2$

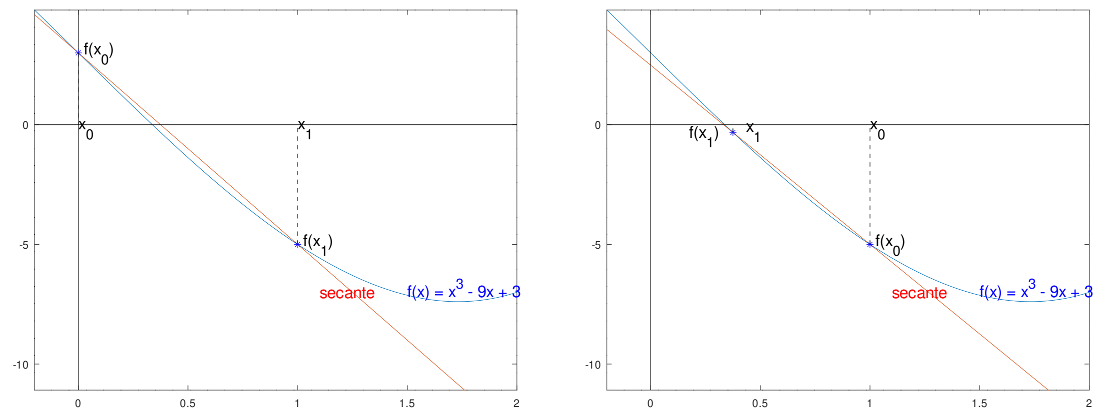
Exemplo 2:

Iteração	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	0.00000	3.00000	-
1	1.00000	-5.00000	1.00000
2	0.37500	-0.32227	0.62500
3	0.33194	0.04910	0.04306
4	0.33763	-0.00022	0.00569
5	0,33761	0,00000	0,00003

Encontrar a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1$. Critério de parada: $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 10^{-4}$.

Logo, $\overline{x} = 0,33761$ e $f(\overline{x}) = -1,46401743617 \times 10^{-7}$

Veja graficamente os resultados das duas primeiras iterações na Figura 1.



(a) Iteração 1.

(b) Iteração 2.

Figura 1 – As duas primeiras iterações do exemplo.

Teste Você Mesmo

Faça você mesmo esse gráfico no Octave:

```
fontSize = 15;
minx = -0.2;
maxx = 2.0;
f = @(x) x.^3 - 9.*x + 3;
x_k = 1;
x_k1 = 0.375;
tan = (f(x_k) - f(x_k1))/(x_k-x_k1);
b = f(x_k1) - x_k1*tan;
rt = @(x) tan.*x + b;#equação da secante a x_k e x_k1
x =[minx:0.01:maxx];
fx = f(x);
plot(x, fx, x, rt(x));
line([minx maxx], [0 0], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
line([0 0], [min(fx)*1.5 max(fx)], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
axis ([minx, maxx, min(fx)*1.5 max(fx)]);
hold on;
plot(x_k, f(x_k), 'b*', x_k1, f(x_k1), 'b*');
```

```
hold off;
line([x_k x_k], [f(x_k) 0], 'linestyle', '--', 'color', 'black');
line([x_k1 x_k1], [f(x_k1) 0], 'linestyle', '--', 'color', 'black');
text(x_k, -0.2 ,'x_0','fontsize',fontSize);
text(x_k1+0.06, -0.3 ,'x_1','fontsize',fontSize);
text(x_k+0.025, f(x_k) ,'f(x_0)','fontsize',fontSize);
text(x_k1-0.2, f(x_k1)-0.15 ,'f(x_1)','fontsize',fontSize);
text(1.5, f(1.5)+0.25 ,'f(x) = x^3 - 9x + 3','fontsize',fontSize, 'color', 'blue');
text(x_k+0.1, -7.0 ,'secante','fontsize',fontSize, 'color', 'red');
```

Exemplo 2:

Utilize o método da secante para calcular uma aproximação de $\sqrt[3]{5}$.

$\sqrt[3]{5} = x$
$5 = x^3$
$x^3 - 5 = 0$

Como $1^3 = 1 < 5$ e $2^3 = 8 > 5$, a raiz deve estar entre 1 e 2. Vamos usar os extremos desse intervalo como aproximações iniciais: $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Iteração	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	-4	-
1	2	3	7
2	1,571429	-1,119534	4,119534
3	1,687898	-0,191178	0,928355
4	1,711883	0,016747	0,207925
5	1,709951	-0,000218	0,016965
6	1,709976	0,000000	0,000217

Logo, $\sqrt[3]{5} \approx 1,709976$

2 Exercícios

1) Encontre a raiz de $f(x) = x^4 - 3.14$ utilizando o método da Secante. Utilize $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Como critério de parada utilize $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-3}$ ou se $|f(x_k)| < 10^{-3}$ ou um máximo de 8 iterações.

2) Considere a função $f(x) = 10x^6 - 18x^5 + 3x^2 - 3.14$. Tomando $x_0 = 1.4$ e $x_1 = 1.8$, encontre a raiz aproximada da função utilizando o método de Newton-Raphson. Considere os critérios de parada $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 10^{-4}$, ou um máximo de 8 iterações.

3) Considere a função $f(x) = e^{-(x^2)} - cos(x)$, e o intervalo inicial $I = [1, 2]$. Escolha um x_0 e um x_1 quaisquer no intervalo I, e encontre a raiz aproximada da função utilizando o método da Secante. Considere os critérios de parada $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 10^{-4}$, ou um máximo de 8 iterações.

4) Note que os exercícios anteriores são os mesmos da aula sobre o Método de Newton-Raphson. Qual método convergiu mais rapidamente. O que você pensa serem as vantagens e desvantagens do método da Secante quando comparado com o de Newton-Raphson?

3 Licença

Referências

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 3. ed. [S.l.]: Grupo GEN, 2018.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.

SANCHES, I.; FURLAN, D. C. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: UFPR, 2007.