Método da Eliminação de Gauss

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Sistemas Lineares
- Método da Eliminação de Gauss

1 Sistema Linear

Um sistema linear é um sistema composto por m equações e n incógnitas, formado por equações lineares. O sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde:

a_{ij}: coeficientes $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

x_j: variáveis $j = 1, 2, \ldots, n$

b_i: constantes $i = 1, \ldots, m$

A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de x_j $(j = 1, \ldots, n)$, caso eles existam, que satisfaçam as m equações simultaneamente.

O sistema pode ser representado utilizando notação matricial, na forma $Ax = b$, onde:

$$\text{Matriz de coeficientes } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Vetor de variáveis } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Vetor constante } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Um sistema linear pode ser classificado quanto ao número de soluções em:

- **Compatível**: quando há solução
  - **Determinado**: solução única. Exemplo onde a solução é $x_1 = 0$ e $x_2 = 0.5$:

    $$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

  - **Indeterminado**: admite infinitas soluções. Exemplo que admite qualquer solução no formato $x_1 = 1 - 2x_2$:

    $$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

- **Incompatível**: o sistema linear não admite solução. Exemplo:

  $$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 1 \\ -1x_1 - 1x_2 = 1 \end{cases}$$

Quando todos os termos independentes $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são iguais a zero, o sistema é chamado de **homogêneo**. Todo sistema homogêneo é compatível, pois admite a solução trivial (atribuir zero a todas as variáveis). Exemplo de solução $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolução de sistemas lineares

- **Métodos diretos**: encontram a solução exata após um número finito de passos.
  - Exemplos: Método da Eliminação de Gauss e Fatoração LU.
- **Métodos indiretos**: iterativos e infinitos que encontram uma aproximação para a solução exata.
  - Exemplos: Método de Gauss-Jacobi e Método de Gauss-Seidel.

Teste Você Mesmo

Regra de Cramer: Seja um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas ($n \times n$), sendo:

- D o determinante da matriz A
- $D_{x1}, D_{x2}, \ldots, D_{xn}$ os determinantes das matrizes obtidas trocando em A, respectivamente, a coluna dos coeficientes x_i pela coluna dos termos independentes.

O sistema será compatível e terá solução única se, e somente se, $D \neq 0$. Neste caso, a única solução é dada por $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$.

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_{x1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_{x3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$x_1 = \frac{-1}{7}, x_2 = \frac{3}{7}, x_3 = \frac{5}{7}$$

No exemplo, cada determinante envolveu 12 multiplicações. Logo foram necessárias 48 multiplicações.

Para n incógnitas, é necessário o cálculo de $n+1$ determinantes de ordem n. Se, por exemplo, $n = 20$, o número total de multiplicações será de $21 \times 20! \times 19$, e um número semelhante de adições. Um computador que executa 10 bilhões de multiplicações por segundo levaria aproximadamente 3100 anos para realizar o cálculo. Precisamos de métodos mais eficientes que a Regra de Cramer!

---

2 Método da Eliminação de Gauss

O método da Eliminação de Gauss é direto. O objetivo é transformar o sistema linear original em um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes **triangular superior**.

Teorema

Seja $Ax = b$ um sistema linear com n equações. Aplicando sobre o sistema as seguintes operações elementares:

i) Trocar duas equações.
ii) Multiplicar uma equação por uma constante.
iii) Adicionar um múltiplo de uma equação a outra equação.

Obtemos um novo sistema $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$, tal que $Ax = b$ e $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ são equivalentes.

Supondo que $det(A) \neq 0$. Utilizamos o teorema para transformar a matriz em uma **matriz triangularizar superior**. Uma matriz $m \times n$ triangular superior tem a forma:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Notações:

- ${a_{ij}}^{(k)}$ denota o coeficiente da linha i, coluna j no final da k-ésima etapa.
- L_i representa o vetor linha formado pelos elementos da linha i da matriz A

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Temos:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Onde $(A|b)$ é chamada de **matriz aumentada**.

Etapa 1

O elemento a_{11} deve ser diferente de zero. Caso não seja, utilizar a operação elementar *(i)*.

No exemplo esse elemento já é diferente de zero.

Utilizando a operação elementar *(iii)*, eliminar x_1 das equações $i = 2, \dots, n$, subtraindo da equação i a primeira equação multiplicada por m_{i1}, onde:

$$m_{i1} = \frac{{a_{i1}}^{(0)}}{{a_{11}}^{(0)}}, i = 2, \dots, n$$

O elemento ${a_{11}}^{(0)}$ é denominado **pivô** nesta etapa.

No exemplo:

Pivô: ${a_{11}}^{(0)} = 3$

$m_{21} = \frac{{a_{21}}^{(0)}}{{a_{11}}^{(0)}} = 1/3$

$m_{31} = \frac{{a_{31}}^{(0)}}{{a_{11}}^{(0)}} = 4/3$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$

Temos então (itens em azul já estão no formato que desejamos):

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array}\right)$$

Etapa 2

O elemento $a_{22}{}^{(1)}$ deve ser diferente de zero. Caso não seja, utilizar a operação elementar *(i)* sem alterar a posição da linha 1.

O elemento $a_{22}{}^{(1)}$ é agora o pivô.

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}{}^{(1)}}{a_{22}{}^{(1)}}, i = 3, \ldots, n$$

Eliminar x_2 das equações $i = 3, \ldots, n$, subtraindo da equação i a segunda equação multiplicada por m_{i2}:

No exemplo:

Pivô: $a_{22}{}^{(1)} = 1/3$

$m_{32} = \frac{a_{32}{}^{(1)}}{a_{22}{}^{(1)}} = 1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$

Logo:

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Seguimos com um raciocínio análogo até a etapa $(n-1)$. O sistema linear $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ é triangular superior e equivale ao sistema original.

Feito isso, basta resolver $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ para se obter a solução.

Como para o sistema do exemplo $n = 3$, já obtivemos uma matriz triangular superior na segunda etapa.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \quad +1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \qquad\qquad -8x_3 = 0 \end{cases}$$

A solução para os sistema é o vetor:

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2:

Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 1x_4 = 5 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 6 \\ 0x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 7 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 15 \end{cases}$$

Solução:

Matriz aumentada.

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Etapa 1.

Os elementos a_{21}, a_{31} e a_{41} já são iguais a zero.

Etapa 2.

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

Etapa 3.

$L_4 \leftarrow L_4 + 4/5L_3$

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 6.8 & 23 \end{array}\right)$$

Resolvendo a matriz triangular:

$$x = \begin{pmatrix} 3.6176 \\ -4.1471 \\ 5.8235 \\ 3.3824 \end{pmatrix}$$

3 Exercícios

1) Resolva os seguintes sistemas lineares através do método da Eliminação de Gauss.

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -1x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

4 Licença

Referências

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.