Fatoração LU

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Fatoração LU

1 Fatoração LU

Seja o sistema linear Ax=b. Realizamos a fatoração A = LU, para obter:

Ax=b $\Leftrightarrow$ (LU)x=b

Onde L é triangular inferior com diagonal unitária e U é triangular superior.

Seja y = Ux. A solução do sistema linear pode ser obtida da resolução dos sistemas lineares triangulares:

i) Ly = b
ii) Ux = y

Vantagem: podemos resolver qualquer sistema que tenha A como matriz dos coeficientes. Se b for alterado, não precisamos recomputar as matrizes L e U.

Cálculo dos fatores L e U pela Eliminação de Gauss.

Vamos resolver através de um exemplo:

Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizando Gauss para triangularizar A:

Etapa 1:

$m_{21} = \frac{1}{3}$
$m_{31} = \frac{4}{3}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 1/3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4/3L_1$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \overline{1/3|} & 1/3 & 2/3 \\ 4/3| & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Note que "guardamos" os multiplicadores m_{21} e m_{31} na matriz, e colocamos um delimitador para deixá-los visivelmente separados do restante da matriz.

Etapa 2:

$m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \overline{1/3|} & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & \overline{1\,|} & -4 \end{pmatrix}$$

Temos uma matriz triangular superior e uma inferior. A matriz de fatores L é dada pelos multiplicadores (que deixamos separados em $A^{(2)}$), onde a diagonal principal deve ter todos elementos iguais a um, e os itens acima da diagonal principal devem ser iguais a zero.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz U pe dada pela matriz triangular superior de $A^{(2)}$.

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

E temos que A = LU

Teste Você Mesmo

Efetue a multiplicação das matrizes e veja que realmente $A = LU$.

Resolvendo L(Ux)=b:

$i)$ Ly=b

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) Ux=y

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Atenção: permutar as linhas da matriz, ou utilizar técnicas de pivoteamento, são válidas para a Fatoração LU. No entanto, isso exige uma matriz de permutação P, que não discutiremos na disciplina. Mais detalhes estão disponíveis nas referências, como por exemplo em Ruggiero e Lopes (1996).

Teste Você Mesmo

Considerando o exemplo anterior, mas agora com $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$, resolva novamente o sistema. Note que agora você não vai precisar calcular novamente os fatores L e U.

Exemplo 2. Resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Etapa 1:

$m_{21} = \frac{1}{3}$
$m_{31} = \frac{4}{3}$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ \overline{1/3|} & 10/3 & 5/3 \\ 4/3| & 16/3 & -13/3 \end{pmatrix}$$

Etapa 2: $m_{31} = \frac{8}{5}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ \overline{1/3|} & 10/3 & 5/3 \\ 4/3 & \overline{8/5|} & -7 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 8/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 10/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

i) Ly=b

$$y = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$$

ii) Ux=y

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 Exercícios

1) Resolva os seguintes sistemas lineares através do método da Fatoração LU.

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -1x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

3 Licença

Referências

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.