Gauss-Seidel

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Método de Gauss-Seidel
- Critérios de convergência para Gauss-Seidel

1 Método de Gauss-Seidel

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, isolamos o vetor x pela diagonal.

No processo iterativo, ao se calcular ${x_j}^{(k+1)}$ usamos todos os valores ${x_1}^{(k+1)}, \ldots, {x_{j-1}}^{(k+1)}$ que já foram calculados. Para os valores que ainda não foram calculados na iteração atual, utilizam-se os valores da iteração anterior ${x_{j+1}}^{(k)}, \ldots, {x_n}^{(k)}$.

Note que a diferença para o método de Gauss-Jacobi é que sempre utilizamos a versão mais atual de x_j a cada iteração.

Função de iteração:

$$\begin{cases} {x_1}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}{x_2}^{(k)} - a_{13}{x_3}^{(k)} - \cdots - a_{1n}{x_n}^{(k)}) \\ {x_2}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}{x_1}^{(k+1)} - a_{23}{x_3}^{(k)} - \cdots - a_{2n}{x_n}^{(k)}) \\ {x_3}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}{x_1}^{(k+1)} - a_{32}{x_2}^{(k+1)} - a_{34}{x_4}^{(k)} - \cdots - a_{3n}{x_n}^{(k)}) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ {x_n}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}{x_1}^{(k+1)} - a_{n2}{x_2}^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}{x_{n-1}}^{(k+1)}) \end{cases}$$

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Considerando $\varepsilon < 5 \times 10^{-2}$ e

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solução:

Função de iteração:

$$\begin{cases} {x_1}^{(k+1)} = 1 - 0.2{x_2}^{(k)} - 0.2{x_3}^{(k)} \\ {x_2}^{(k+1)} = 1.5 - 0.75{x_1}^{(k+1)} - 0.25{x_3}^{(k)} \\ {x_3}^{(k+1)} = 0 - 0.5{x_1}^{(k+1)} - 0.5{x_2}^{(k+1)} \end{cases}$$

Iteração $k = 0$

Note que os itens em azul são as aproximações para x da iteração anterior, e em vermelho são as aproximações já calculadas na iteração atual. Por exemplo, ao calcular $x_2^{(1)}$, já temos uma aproximação mais recente $x_1^{(1)} = 1$ calculada, e podemos utilizá-la. No entanto, como ainda não computamos $x_3^{(1)}$, precisamos utilizar $x_3^{(0)} = 0$ como a aproximação.

$$\begin{cases} {x_1}^{(1)} = 1 - 0.2 * 0 - 0.2 * 0 = 1 \\ {x_2}^{(1)} = 1.5 - 0.75 * 1 - 0.25 * 0 = 0.75 \\ {x_3}^{(1)} = 0 - 0.5 * 1 - 0.5 * 0.75 = -0.875 \end{cases}$$

Então:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix}$$

Erro relativo:

$|{x_1}^{(1)} - {x_1}^{(0)}| = 1$
$|{x_2}^{(1)} - {x_2}^{(0)}| = 0.75$
$|{x_3}^{(1)} - {x_3}^{(0)}| = 0.875$

$d^{(1)} = 1$

${d_r}^{(1)} = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon$

Iteração $k = 1$

$$\begin{cases} {x_1}^{(2)} = 1 - 0.2 * 0.75 - 0.2 * (-0.875) = 1.025 \\ {x_2}^{(2)} = 1.5 - 0.75 * 1.025 - 0.25 * (-0.875) = 0.95 \\ {x_3}^{(2)} = 0 - 0.5 * 1.025 - 0.5 * 0.95 = -0.9875 \end{cases}$$

Então:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix}$$

${d_r}^{(2)} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon$

Continuando com as iterações obtemos:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix}$$

${d_r}^{(3)} = 0.0409 < \varepsilon$

Logo, $\overline{x} = x^{(3)}$

2 Critérios de Convergência do Método de Gauss-Seidel

O critério das linhas é válido para Gauss-Seidel.

Além disso, temos o critério de Sassenfeld.

2.1 Critério de Sassenfeld

Sejam:

$$\beta_1 = \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} |a_{1j}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum\limits_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \text{ para } i = 2, 3, \dots, n$$

$$\beta = \max_{1 \le j \le n} \beta_j$$

Se $\beta < 1$, então Gauss-Seidel gera uma sequência convergente qualquer que seja $x^{(0)}$.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.1x_3 + 0.1x_4 = 0.2 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_3 - 0.1x_4 = -2.6 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3 + 0.2x_4 = 1.0 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + x_4 = -2.5 \end{cases}$$

$\beta_1 = (0.5 + 0.1 + 0.1)/1 = 0.7$
$\beta_2 = (0.7 * 0.2 + 0.2 + 0.1)/1 = 0.44$
$\beta_3 = (0.7 * 0.1 + 0.44 * 0.2 + 0.2)/1 = 0.358$
$\beta_4 = (0.7 * 01 + 0.44 * 0.3 + 0.358 * 0.2)/1 = 0.2736$

Logo, $\beta = 0.7 < 1$ e temos garantia que o método de Gauss-Seidel irá convergir.

Pontos importantes:

- O critério de Sassenfeld é apenas suficiente.
- Caso o critério não seja satisfeito, podemos utilizar as operações elementares na matriz para que o critério seja satisfeito.
- Se o critério das linhas é satisfeito, o critério de Sassenfeld é automaticamente satisfeito.
- É possível que o critério de Sassenfeld seja satisfeito, mesmo que o critério das linhas não seja.

3 Exercícios

1) Verifique o critério de Sassenfeld para o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ \qquad -x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \qquad +3x_3 = 3 \end{cases}$$

2) Verifique se o critério das linhas e o critério de Sassenfeld são satisfeitos para o sistema a seguir. Feito isso, resolva o sistema por Gauss-Seidel com $\varepsilon < 10^{-1}$ ou um máximo de 7 iterações. Considere $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28 \\ x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}$$

3) Verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito para o sistema a seguir. Caso o critério não seja satisfeito, existe alguma permutação das linhas que satisfaça o critério? Resolva o sistema apenas se o critério de Sassenfeld for satisfeito para o sistema original ou para alguma permutação das suas linhas/colunas. Utilize Gauss-Seidel considerando o erro relativo como $\varepsilon < 10^{-2}$ ou um máximo de 7 iterações. Escolha sua aproximação inicial x^0 e indique qual sistema equivalente você utilizou, caso tenha permutado alguma linha/coluna.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -1x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$

4 Licença

Referências

FILHO, A. *Fundamentos de Cálculo Numérico*. [S.l.]: Bookman Editora, 2016. ISBN 9788582603857.

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.