Interpolação Polinomial

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Conceitos básicos sobre interpolação
- Interpolação Polinomial

1 Interpolação

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma função $g(x)$. A função $g(x)$ pode então ser usada em substituição à função $f(x)$.

Útil quando:

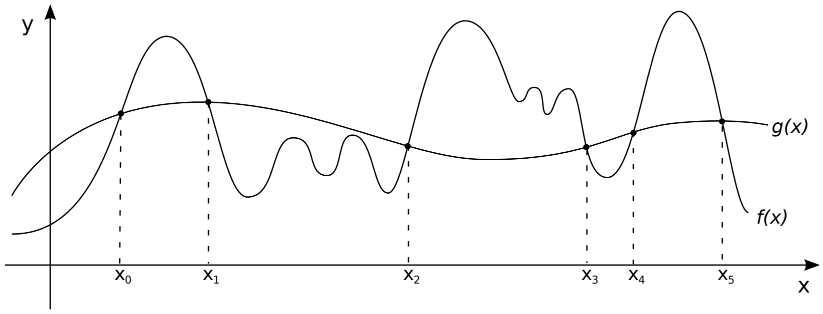
- Conhecemos somente alguns pontos tabelados de $f(x)$ mas não conhecemos a função $f(x)$.
- Operações como diferenciação ou integração são muito complexas em $f(x)$.

Considere $(n+1)$ pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, chamados *nós da interpolação*, e os valores $f(x)$ nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Ao interpolar $f(x)$, desejamos obter uma função $g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Um exemplo considerando $n = 5$:



2 Interpolação Polinomial

Dados os pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1), \ldots, (x_n, f(x_n)))$, portanto $(n+1)$ pontos, desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n de forma que:

$f(x_k) = p_n(x_k), k = 0, 1, \ldots, n$

O polinômio $p_n(x)$ é representado como:

$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

Precisamos obter os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Como $p_n(x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \ldots, n$, podemos montar o sistema linear de $(n+1)$ equações e $(n+1)$ variáveis:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \cdots + a_n {x_0}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_n {x_1}^n = f(x_1) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_n {x_n}^n = f(x_n) \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes fica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \ldots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^n \end{pmatrix}$$

A matriz A é uma matriz de Vandermonde, onde os elementos da linha estão em progressão geométrica. Sendo assim, desde que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sejam distintos, **o sistema admite solução única**.

Teorema

Existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que: $p_n(x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \ldots, n$, desde que $x_k \neq x_j, j \neq k$.

Exemplo: dada a tabela de pontos, obter $P_n(x)$ pela resolução do sistema linear.

x	**-1**	**0**	**2**
f(x)	4	1	-1

Note que o polinômio é de grau dois, pois temos $(n+1) = 3$ pontos, logo $n = 2$.

$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

O sistema linear fica:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2) \end{cases} = \begin{cases} a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 4 \\ a_0 + a_1(0) + a_2(0) = 1 \\ a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 = -1 \end{cases} = \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 + 0a_1 + 0a_2 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

O sistema linear pode ser resolvido, por exemplo, utilizando as técnicas de resolução discutidas na disciplina. Como exemplo, o sistema vai ser resolvido por Eliminação de Gauss:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

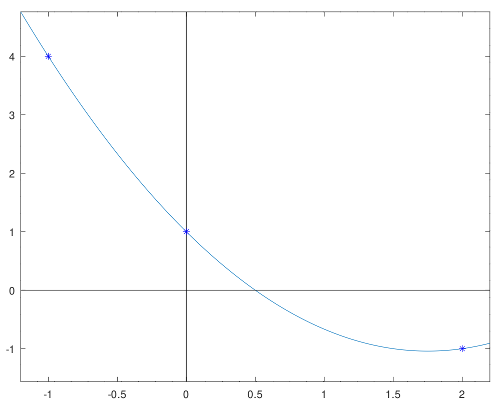
Temos então que $a_0 = 1, a_1 = -7/3, a_2 = 2/3$.

Logo, o polinômio interpolador fica:

$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

Sendo que $p_2(x_0) = f(x_0)$, $p_2(x_1) = f(x_1)$ e $p_2(x_2) = f(x_2)$.

Veja graficamente o polinômio resultante:



Teste Você Mesmo

Para exibir o gráfico no Octave, execute os seguintes comandos:

```
minx = -1.2;
maxx = 2.2;
f = @(x) (2/3).*x.^2 - (7/3).*x +1;
x =[minx:0.01:maxx];
fx = f(x);
plot(x, fx);
line([minx maxx], [0 0], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
line([0 0], [min(fx)*1.5 max(fx)], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
axis ([minx, maxx, min(fx)*1.5 max(fx)]);
hold on;
plot(-1, 4, 'b*', 0, 1, 'b*', 2, -1, 'b*');
hold off;
```

---

3 Exercícios

1) Dado o conjunto de valores contendo a velocidade v(m/s) que uma turbina atingiu a cada tempo t(s):

t(s)	0	10	15	20
v(m/s)	0	227,04	362,78	517,35

Encontre o polinômio interpolador.

2) Dada a seguinte tabela, encontre o polinômio interpolador para $f(x)$:

x	-2	0	1	2
f(x)	-5	1	4	15

Encontre o polinômio interpolador.

4 Licença

Esta obra tem a licença Creative Commons "Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional".

Referências

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.