Sistemas Mal Condicionados e Interpolação Linear

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Interpolação Polinomial
  - O problema dos sistemas mal condicionados
- Interpolação Linear

1 Interpolação Polinomial por Sistema lineares - O problema dos sistemas mal condicionados

Considere os seguintes sistemas lineares:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 15 \\ 5.01x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 15 \\ 5x_1 + 3.01x_2 = 15 \end{cases}$$

Teste Você Mesmo

Antes de prosseguir com o a aula, resolva você mesmo esses sistemas.

O que acontece de contraintuitivo com os resultados?

Resolvendo os sistemas, temos:

Primeiro sistema $x1 \approx 0, x2 \approx 5$.

Segundo sistema $x1 \approx 3, x2 \approx 0$.

Os sistemas são praticamente iguais, porém a diferença nos resultados é grande.

Sistemas em que uma pequena diferença num coeficiente causa uma grande mudança nos resultados, são chamados Sistemas Mal Condicionados.

Nesses casos, um pequeno erro numérico pode levar a um grande erro no resultado. Exemplo: se estivermos resolvendo o sistema em um computador com ponto flutuante.

O que caracteriza esses sistemas é que seu determinante é muito pequeno quando comparado a seus elementos[1].

Problema: na interpolação por sistemas lineares, podemos criar matrizes de Vandermonde mal condicionadas.

Exemplo:

Obter o polinômio que interpola os pontos:

x	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**
f(x)	5	13	-4	-8

O polinômio fica $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

Se usarmos aritmética de ponto flutuante com três dígitos para realizar os cálculos, e o método da Eliminação de Gauss, o polinômio será: $p_3(x) = -66 + 1150x - 5050x^2 + 6330x^3$

Se resolvermos por Gauss, utilizando aritmética de ponto flutuante de três dígitos:

$p_3(x) = -66 + 1150x - 5050x^2 + 6330x^3$

No entanto:

$p_3(0.4) = -10 \neq f(0.4)$

Note que -10 é o resultado obtido computando-se $p_3(0.4)$ utilizando a mesma aritmética de ponto flutuante utilizada para se resolver o sistema linear. Se você utilizar uma calculadora por exemplo, o resultado será $p_3(0.4) = -8.88$, que também é diferente de $f(4)$.

2 Interpolação Linear

Dados dois pontos distintos de uma função $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, deseja-se calcular um valor $\overline{y}$ para um ponto $\overline{x}$ que está entre x_0 e x_1.

Nesse caso, o polinômio interpolador terá grau 1, e estamos aproximando a função a uma reta. Logo temos o sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 = f(x_1) \end{cases}$$

E $p_1(x) = a_0 + a_1x$

Esse tipo de interpolação pode ser especialmente útil quando desejamos encontrar um valor não tabelado, mas que está entre dois valores tabelados.

Exemplo:

[1] Veja uma explicação aqui: <www.raymundodeoliveira.eng.br/sistemas_mal_condicionados.html>

Dado o conjunto de valores contendo a velocidade v (m/s) que uma turbina atingiu a cada tempo t (s):

t(s)	**0**	**10**	**15**	**20**
v(m/s)	0	227,04	362,78	517,35

Estimar a velocidade que a turbina atingiu no tempo $t(16)$.

Como 16 está entre os pontos tabelados 15 e 20:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 15 = 362,78 \\ a_0 + a_1 20 = 517,35 \end{cases}$$

Resolvendo:

$a_0 = 362.78 - 15a_1$
$20a_1 = 517.35 - a_0$
$20a_1 = 517.35 - 362.78 + 15a_1$
$5a_1 = 154.57$
$a_1 = 30.91$

$a_0 = 362.78 - 15 \times 30.91$
$a_0 = -100.87$

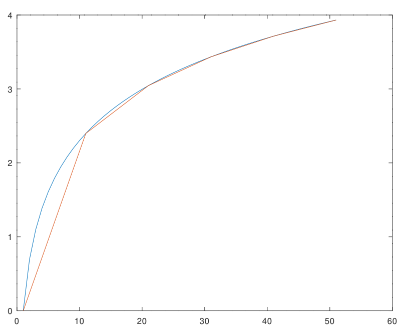
Logo:

$p_1(x) = -100.87 + 30.91x$
$p_1(16) = 393.69$

CURIOSIDADE

A interpolação linear é comumente utilizada em programas que plotam gráficos, como o Octave, Matlab, R, ...

Veja um exemplo do gráfico de $ln(x)$ considerando $x_1 = 1, 2, 3 \ldots, 51$ e $x_2 = 1, 10, 20 \ldots, 51$. Note que na versão mais "espaçada" para os valores de x, é visível que o Octave ligou os pontos através de retas.



Para protar esse gráfico, utilize os comandos:

```
x1 = [1:1:51];
```

```
x2 = [1:10:51];
plot(x1, log(x1), x2, log(x2));
```

---

3 Polinômios de grau maior

Note que o mesmo raciocínio utilizado na interpolação linear pode ser utilizado para polinômios de outros graus, como 2, 3, ...

4 Exercícios

1) Dada a tabela a seguir, utilize interpolação linear para:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	1	1.201	1.416	1.681	2.056

a) Calcular $f(0.15)$.

b) Calcular $f(0.05)$.

c) Calcular $f(0.31)$.

2) A função que gerou a tabela do exercício anterior é $f(x) = 10x^4 + 2x + 1$. Compare os resultados que você obteve utilizando a interpolação com os obtidos utilizando a função real.

5 Licença

Referências

BARROSO, L. C. et al. *Calculo Numerico (com Aplicaçoes)*. [S.l.]: HARBRA, 1987. ISBN 9788529400891.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.