Introdução ao Cálculo e Erros

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

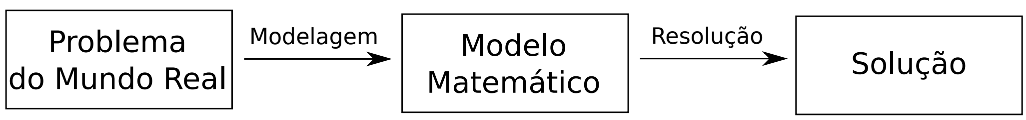
Conteúdo da Aula

- Introdução ao Cálculo Numérico
- Noções sobre erro

1 Cálculo Numérico

Cálculo Numérico: obtenção da solução de um problema pela aplicação de método numérico; a solução do problema será caracterizada, então, por um conjunto de números, exatos ou aproximados.

Método Numérico: algoritmo composto por um número finito de operações envolvendo apenas números (operações aritméticas elementares, cálculo de funções, consulta a uma tabela de valores, arbitramento de um valor, etc.).



Modelagem: fase de obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema físico.

Resolução: é a fase de obtenção da solução através da aplicação de métodos numéricos.

2 Erro

A noção de erro está presente em todos os campos do cálculo numérico. Erro pode ser considerado como a diferença entre o valor exato e o valor apresentado.

Erros na Fase de Modelagem: Ao se tentar representar um fenômeno do mundo físico por meio de um método matemático, raramente se tem uma descrição correta deste fenômeno. Exemplo: ao se medir o peso de determinado objeto em uma balança[1], a medição

[1] Curiosamente nossas balanças deveriam medir o peso em Newtons (N) e não em Quilogramas (kg), já que Kg é uma medida de massa, não peso. Veja esse vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=el2eRPwREJE>

não é exata, já que diferentes fatores podem alterar a medição (exemplos.: a gravidade na superfície da Terra não é constante, o peso pode mudar de acordo com a altitude, com a pressão atmosférica, ...).

Erros na Fase de Resolução: Para a resolução de modelos matemáticos muitas vezes torna-se necessária a utilização de instrumentos de cálculo que necessitam que sejam feitas certas aproximações. Erros podem ser gerados devido a, por exemplo, conversões de bases, erros de arredondamento e erros de truncamento.

Considere ainda o seguinte. Um computador, calculadora, ou qualquer coisa semelhante, possui uma quantidade finita de memória. Considerando ainda que entre dois números reais A e B quaisquer, onde $A \neq B$, existe um número infinito de números (por exemplo, entre 0 e 1 existem 0.1, 0.01, 0.0003, ...), como representar qualquer número real nas nossas máquinas? Precisamos representar aproximações!

2.1 Arredondamento e truncamento

Considere que vamos representar um número usando apenas até a *p-ésima* casa decimal.

Truncar um número até a *p-ésima* casa decimal significa simplesmente desconsiderar todo os dígitos após essa casa.

Exemplo:

Considere o número 2,345678. Ao truncar o valor considerando:

Duas casas decimais: 2,34
Três casas decimais: 2,345
Quatro casas decimais: 2,3456

Já para o arredondamento, podemos definir diversas regras, as quais diferem basicamente na forma de se arredondar quando a $(p+1)$-*ésima* casa é 0,5. Na disciplina vamos usar a definição disponível em Pires (2014), que é uma das mais comuns, e diz o seguinte:

Devemos olhar para o dígito $p+1$ e:

Se $p+1 < 5$, o dígito p é mantido.
Se $p+1 > 5$, devemos somar 1 no dígito p.
Se $p+1 = 5$, temos duas possibilidades:

- Se em qualquer dígito seguinte a $p+1$ $(p+2, p+3, \dots)$ existir um número maior que 0, somar 1 em p
- Caso contrário, somar 1 em p somente se p for ímpar.

Exemplo:

Considere o número 2,3455. Ao arredondar o valor considerando:

Uma casa decimal: 2,3
Duas casas decimais: 2,35
Três casas decimais: 2,346

Outro Exemplo:

Considere o número 1,425. Ao arredondar o valor considerando:

Uma casa decimal: 1,4
Duas casas decimais: 1,42

2.2 Erro Absoluto

Erro absoluto é a diferença entre o valor exato de um número x e seu valor aproximado $\overline{x}$: $EA_x = x - \overline{x}$.

Geralmente não conhecemos o valor de x, impossibilitando o cálculo do valor de EA_x. Mas podemos obter um limitante superior ou uma estimativa para o módulo do erro absoluto.

Exemplo:

$\pi \in (3.14, 3.15)$

Observação: Os parêntesis indicam um intervalo aberto, onde os extremos não fazem parte do intervalo.

Logo, se tomarmos um valor dentro deste intervalo para π, então $|EA_\pi| = |\pi - \overline{\pi}| < 0.01$

2.3 Erro Relativo

Seja um número x, para o qual obtivemos a aproximação $\overline{x} = 2112.9$ de forma que $|EA_X| < 0.1$, ou seja, $x \in (2112.8, 2113)$. Da mesma forma, para um número y obtivemos $\overline{y} = 5.3$ e $|EA_y| < 0.1$, logo $y \in (5.2, 5.4)$.

Note que $|EA_x| = |EA_y|$. Podemos afirmar que os números são representados com a mesma precisão?

Geralmente não. Para isso, precisamos comparar a ordem de grandeza de x e y.

Exemplo: um erro de medição em 1 cm em uma estrada de 300 Km pode ser irrelevante, enquanto o mesmo erro de 1 cm durante uma cirurgia pode ser fatal.

Erro relativo:

$$ER_x = \frac{EA_X}{\overline{x}}$$

Calculando ER para x e y temos

$$ER_x = \frac{EA_X}{\overline{x}} < \frac{0.1}{2112.9} \approx 4.7 \times 10^{-5}$$

$$ER_y = \frac{EA_y}{\overline{y}} < \frac{0.1}{5.3} \approx 0.02$$

Logo, x é representado com maior precisão que y.

3 Exercícios

1) O número de Euler e é aproximadamente $2,7182\ldots$. Utilizando uma análise similar a realizada com π durante a aula, dê o limitante superior do erro absoluto para a representação de e com 4 casas decimais.

2) Faça o mesmo que no exercício anterior, mas utilizando agora π e 5 casas decimais.

3) Utilizando o erro relativo, demonstre qual das constantes (e ou π) está sendo representada com maior precisão.

4 Licença

Referências

PATTERSON, D.; HENNESSY, J. *Organização e Projeto de Computadores, 5ª Edição: Interface Hardware / Software*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2017.

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: TEditora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.

SANCHES, I.; FURLAN, D. C. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: UFPR, 2007.