Forma de Lagrange para Interpolação

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Forma de Lagrange para Interpolação

1 Forma de Lagrange para Interpolação

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i), i = 0, \ldots, n$.

O polinômio que interpola os pontos de f pode ser representado por:

$p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \cdots + y_nL_n(x)$

Onde $L_k(x)$ são polinômios de grau n.

Como para cada i, $p_n(x_i) = y_i$ deve ser satisfeito, temos:

$p_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \cdots + y_nL_n(x_i) = y_i$

Para satisfazer esta condição, podemos impor:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq i \\ 1 \text{ se } k = i \end{cases}$$

E para isso, definimos $L_k(x)$ por

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

Note que na equação não tem $(x - x_k)$.

Dessa forma:

$$L_k(x) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}$$

E a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_kL_k(x)$$

Exemplo:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Temos que:

$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$, onde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}$$

Logo:

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right) - 1\left(\frac{x^2+x}{6}\right)$$

Agrupando os termos semelhantes temos:

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Exemplo 2: Forma de Lagrange para Interpolação Linear.

Considere a interpolação entre dois pontos distintos: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Logo $n = 1$ e:

$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}, L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Assim,

$$p_1(x) = y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Simplificando:

$$p_1(x) = \frac{(x_1-x)y_0 + (x-x_0)y_1}{(x_1-x_0)}$$

Que é a equação da reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Com um raciocínio análogo, podemos obter as fórmulas para interpolação quadrática e cúbica.

TESTE VOCÊ MESMO

Utilizando a forma de Lagrange para Interpolação, tente você mesmo chegar na equação da parábola que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

2 Exercícios

1) Calcule o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos abaixo:

x	**-1**	**0**	**2**	**3**
f(x)	4	1	1	16

2) Calcule o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos a seguir:

x	-2	0	1	2
f(x)	-5	1	4	15

3 Licença

Referências

BARROSO, L. C. et al. *Calculo Numerico (com Aplicaçoes)*. [S.l.]: HARBRA, 1987. ISBN 9788529400891.

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.