Polinômios de Newton

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Forma de Newton
  - Operador Diferenças Divididas
  - Forma de Newton para o Polinômio Interpolador

1 Forma de Newton

A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, com $(n+1)$ pontos é dada por:

$p_n(x) = d_0 + (x - x_0)d_1 + (x - x_0)(x - x_1)d_2 + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})d_n$

Onde $d_k, k = 0, 1, \ldots, n$ são diferenças divididas de ordem k.

2 Operador de diferenças divididas

Considerando $x_0, x_1, \ldots, x_n$, como $(n+1)$ pontos tabelados de $f(x)$.

O *operador de diferenças divididas* $f[x]$ é definido por:

Ordem	**Operador**
0	$f[x_i] = f(x_i)$
1	$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$
2	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$
3	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}$
$\ldots$	
n	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_0}$

$f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ é chamado de diferença dividida de ordem k da função $f(x)$ sobre os $k+1$ pontos: $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Uma forma simples de se obter os operadores é construindo a seguinte tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	... Ordem n
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\ddots$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$\dots f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
		$f[x_3, x_4]$		$\vdots$	$\iddots$
x_4	$f[x_4]$		$\vdots$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	
		$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
$\vdots$	$\vdots$				
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

O operador de diferenças divididas é simétrico em seus argumentos. Exemplo:

$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0]$

3 Forma de Newton para o Polinômio Interpolador

Substituindo d_k pelas diferenças divididas, a forma de Newton para o polinômio de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ em $x_0, \dots, x_n$ é dado por:

$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$
$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

Exemplo 1:

Encontrar o polinômio para os pontos tabelados:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

O polinômio é dado por:

$p_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 4$		
		$f[x_0, x_1] = -3$	
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = 2/3$
		$f[x_1, x_2] = -1$	
$x_2 = 2$	$f[x_2] = -1$		

Sendo que:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 4}{0 - (-1)} = -3$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 1}{2 - 0} = -1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1-(-3)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$$

Logo:

$$p_2(x) = 4 + (x+1)(-3) + (x+1)(x-0)\frac{2}{3}$$

Dica

É conveniente deixar o polinômio no formato de Newton para evitar o cálculo de potências nas máquinas. Mas você também pode expandir o polinômio. No exemplo anterior, temos que:

$$p_2(x) = 4 + (x+1)(-3) + (x+1)(x-0)\frac{2}{3} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

Exemplo 2:

Encontrar o polinômio interpolador através da forma de Newton para:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	-1	-2

O polinômio é dado por:

$p_4(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] +$
$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

A tabela de diferenças divididas é:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		-1/2		
		-1		1/6	
1	0		0		-1/24
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

Logo:

$p_4(x) = 1 + (x+1)0 + (x+1)(x)(-\frac{1}{2}) + (x+1)(x)(x-1)\frac{1}{6} + (x+1)(x)(x-1)(x-2)(-\frac{1}{24})$

4 Exercícios

1) Construa uma tabela para $f(x) = cos(x)$ considerando os pontos 0.9, 1.0, 1.1 e 1.2. Obtenha o polinômio de Newton $p_n(x)$ que interpola esses pontos. Utilize o polinômio $p_n(x)$ obtido para calcular $p_n(0.95)$. Qual a diferença do resultado entre $p_n(0.95)$ e $cos(0.95)$?

2) Construa uma tabela para $f(x) = xln(x) - log(x) + e$ considerando os pontos 0.1, 0.6, 1.1, 1.6 e 2.1. Obtenha o polinômio de Newton $p_n(x)$ que interpola esses pontos. Utilize o polinômio $p_n(x)$ obtido para calcular $p_n(0.5)$. Qual a diferença do resultado entre $p_n(0.5)$ e $f(0.5)$?

5 Licença

Referências

BARROSO, L. C. et al. *Calculo Numerico (com Aplicaçoes)*. [S.l.]: HARBRA, 1987. ISBN 9788529400891.

FILHO, C. *ALGORITMOS NUMERICOS - Uma Abordagem Moderna de Cálculo Numérico*. [S.l.]: Editora AtlasLTC, 2018. ISBN 9788521612650.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.