Polinômios de Newton-Gregory

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Polinômios de Newton-Gregory
  - Operador Diferenças Divididas
  - Forma de Newton para o Polinômio Interpolador

1 Newton-Gregory

Relembrando, a forma de Newton para o polinômio interpolador é:

$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$
$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

Se assumirmos que os pontos são igualmente espaçados por uma distância h, temos que:

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$

Ou seja:

$x_i = x_{i-1} + h \Rightarrow x_i = x_0 + i \times h$

Podemos definir o operador de diferença finita ascendente Δ^i de ordem i como:

Ordem	**Operador**
0	$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$
1	$\Delta^1 f(x_i) = \Delta^0 f(x_{i+1}) - \Delta^0 f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$
2	$\Delta^2 f(x_i) = \Delta^1 f(x_{i+1}) - \Delta^1 f(x_i)$
...	
n	$\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i)$

Da mesma forma que para o operador de diferenças divididas, podemos montar uma tabela para simplificar a obtenção das diferenças finitas ascendentes.

Exemplo de montagem da tabela:

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**	**Ordem 3**	**Ordem 4**
$x_0 = 3.5$	$f(x_0) = 9,82$				
		$10.91 - 9.82 = 1.09$			
$x_1 = 4$	$f(x_1) = 10.91$		$1.14 - 1.09 = 0.05$		
		$12.05 - 10.91 = 1.14$		$-0.05 - 0.05 = -0.1$	
$x_2 = 4.5$	$f(x_2) = 12.05$		$1.09 - 1.14 = -0.05$		2.11
		1.09		2.01	
$x_3 = 5$	$f(x_3) = 13.14$		1.96		
		3.05			
$x_4 = 5.5$	$f(x_4) = 16.19$				

O Operador de diferenças divididas $f[x_i]$ pode ser relacionado com o operador de diferenças finitas Δ da seguinte forma:

Ord.	**Operador**
0	$f[x_i] = \Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$
1	$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = \dfrac{\Delta^1 f(x_i)}{h}$
2	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i} = \dfrac{\dfrac{\Delta^1 f(x_{i+1})}{h} - \dfrac{\Delta^1 f(x_i)}{h}}{2h} = \dfrac{\Delta^1 f(x_{i+1}) - \Delta^1 f(x_i)}{2h^2} = \dfrac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}$
3	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \dfrac{\dfrac{\Delta^2 f(x_{i+1})}{2h^2} - \dfrac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}}{3h} = \dfrac{\Delta^2 f(x_{i+1}) - \Delta^2 f(x_i)}{(2 \times 3)h^3} = \dfrac{\Delta^3 f(x_i)}{(2 \times 3)h^3}$
...	
n	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \dfrac{\Delta^n f(x_i)}{n!h^n}$

DICA

Veja em Arenales e Darezzo (2008) uma prova de que $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \dfrac{\Delta^n f(x_i)}{n!h^n}$.

Substituindo na forma de Newton, obtemos então a forma de Newton-Gregory, definida como:

$p_n(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\dfrac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\dfrac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\dfrac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$

Ou seja:

$$p_n(x) = \Delta^0 f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i} \right\}$$

Exemplo 2:

Considerando a seguinte tabela com valores para x e $f(x)$, obter o polinômio interpolador por Newton-Gregory e calcular $f(0.5)$:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	2	1	2	5	10

Montando a tabela:

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**	**Ordem 3**	**Ordem 4**
$x_0 = -1$	$f(x_0) = 2$				
		-1			
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 1$		2		
		1		0	
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 2$		2		0
		3		0	
$x_3 = 2$	$f(x_3) = 5$		2		
		5			
$x_4 = 3$	$f(x_4) = 10$				

Temos então:

$p_4(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!h^4}$

Note que $\Delta^3 f(x_0)$ e $\Delta^4 f(x_0)$ são zero na tabela, anulando os respectivos termos no polinômio que, sendo assim, terá grau 2. Como h é a "distância" entre os pontos x_i, que devem ser igualmente espaçados, podemos calcular h por $h = x_1 - x_0 = 1$. Substituindo:

$p_2(x) = 2 + (x - (-1))\frac{-1}{1!1^1} + (x - (-1))(x - 0)\frac{2}{2!1^2}$

$p_2(x) = 2 + (x + 1)(-1) + (x + 1)(x)$

Substituindo na fórmula, $p(0.5) = 1.25$

2 Exercícios

1) Dada a tabela de pontos a seguir, obtenha o polinômio que interpola esses pontos utilizando a forma de Newton-Gregory. Utilize o polinômio para calcular $f(1.3)$.

x	1	2	3
f(x)	0	1/2	2/3

2) Construa uma tabela para $f(x) = cos(x)$ considerando os pontos 0.9, 1.0, 1.1 e 1.2. Obtenha o polinômio que interpola esses pontos utilizando a forma de Newton-Gregory. Utilize o polinômio $p_n(x)$ obtido para calcular $p_n(0.95)$.

3) Construa uma tabela para $f(x) = xln(x) - log(x) + e$, considerando 5 pontos, onde o primeiro ponto deve ser 0.1 ($x_0 = 0.1$) e o último ponto deve ser 2.1 ($x_4 = 2.1$). Obtenha o polinômio de Newton-Gregory $p_n(x)$ que interpola esses pontos. Utilize o polinômio $p_n(x)$ obtido para calcular $p_n(0.5)$.

3 Licença

Referências

ARENALES, S.; DAREZZO, A. *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*. [S.l.]: THOMSON PIONEIRA, 2008. ISBN 9788522106028.

FILHO, C. *Algoritmos Numéricos - Uma Abordagem Moderna de Cálculo Numérico*. [S.l.]: Editora AtlasLTC, 2018. ISBN 9788521612650.