Regra dos Trapézios

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

1 Conteúdo da Aula

- Regra dos Trapézios para Integração Numérica

2 Regra dos Trapézios

Na interpolação por Retângulos estamos aproximando cada subintervalo a um polinômio de grau zero.

Na tentativa de reduzir o erro numérico, podemos interpolar cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ como um polinômio de grau 1.

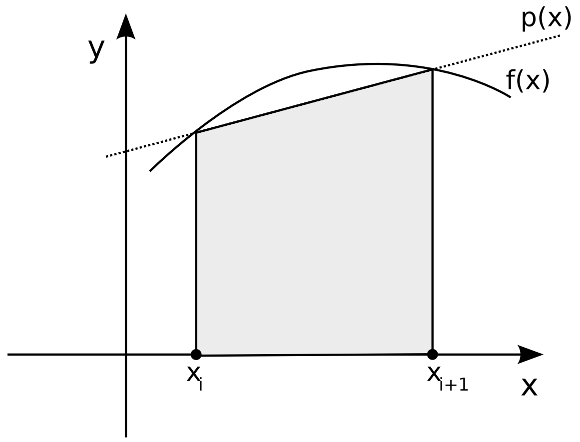
Interpolando por Lagrange, temos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{x - x_{i+1}}{-h} f(x_i) + \frac{x - x_i}{h} f(x_{i+1})\right] dx = I_T$$

Resolvendo a integral:

$$I_T = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Que é a área do trapézio de altura $h = (x_{i+1} - x_i)$ e bases $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$.

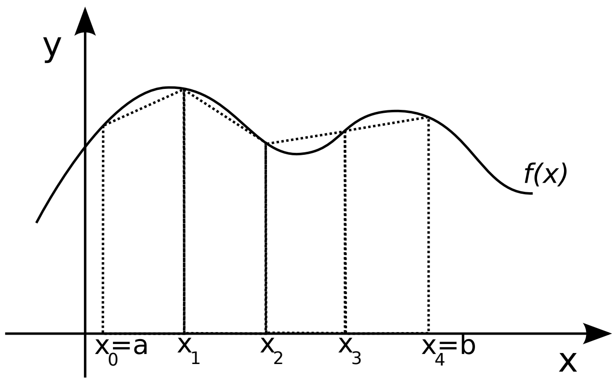


Então, se dividirmos o intervalo de integração $[a, b]$ em n subintervalos (da mesma forma que na regra dos retângulos), e considerando h constante, temos que uma aproximação para a integral é:

$$T(h_n) = h_n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) = \frac{h_n}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right)$$

Onde

$$h_n = \frac{b-a}{n}$$



Exemplo 1:

Calcular $\int_3^{3.6} \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios. Considere $n = 6$.

$h_6 = (b-a)/6 = (3.6-3)/6 = 0.1$

i	x_i	$f(x_i)$	$(f(x_i) + f(x_{i+1})/2$
0	3	0.3333	0.328
1	3.1	0.3226	0.3175
2	3.2	0.3125	0.3078
3	3.3	0.303	0.2986
4	3.4	0.2941	0.2899
5	3.5	0.2857	0.2817
6	3.6	0.2778	-
$\sum$			1.8235

$$T(h_6) = h \sum_{i=0}^{5} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right)$$

$$T(0.1) = 0.1 \times 1.8235 = 0.18235$$

Resolvendo analiticamente:

$$\int_3^{3.6} \frac{1}{x} dx = ln(x) \Big]_3^{3.6} = ln(3.6) - ln(3) = 0.18232$$

Exemplo 2:

Calcular $\int_1^2 xln(x)dx$ pela regra dos trapézios considerando $n = 8$.

$h_8 = (2-1)/8 = 0.125$

i	x_i	$f(x_i)$	$(f(x_i) + f(x_{i+1})/2$
0	1	0	0.0663
1	1.125	0.1325	0.2057
2	1.25	0.2789	0.3584
3	1.375	0.4379	0.523
4	1.5	0.6082	0.6986
5	1.625	0.789	0.8841
6	1.75	0.9793	1.079
7	1.875	1.1786	1.2825
8	2	1.3863	-
$\sum$			5.0976

$T(0.125) = 0.125 \times 5.0976 = 0.6372$

Analiticamente:

$$\int_1^2 xln(x)dx = \frac{x^2ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\Big]_1^2 = 0.6363$$

CURIOSIDADE

A maioria dos softwares para cálculo que utilizamos (Octave, MATLAB, calculadora HP, ...) possuem funções que calculam integrais por aproximações numéricas.

Um exemplo é a função *trapz*, disponível no Octave e MATLAB, que computa uma aproximação numérica da integral de um conjunto de pontos utilizando uma aproximação pela regra dos trapézios.

Para detalhes, digite o comando *help trapz;* no Octave ou MATLAB.

---

3 Exercícios

1) Calcule as seguintes integrais pela Regra dos Retângulos utilizando $n = 4$ e $n = 6$. Compare os resultados obtidos com os resultados analíticos.

$$a) \int_1^2 e^x dx$$

$$b) \int_1^4 \sqrt{x}\, dx$$

$$c) \int_2^{14} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

4 Licença

Referências

CLAUDIO, D.; MARINS, J. *Calculo numerico computacional: teoria e pratica*. 2. ed. [S.l.]: Atlas, 1994.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.