Regra 1/3 de Simpson

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

1 Conteúdo da Aula

- Regra 1/3 de Simpson

2 Regra de Simpson

A regra de Simpson é obtida aproximando-se $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau 2, ou seja, uma parábola.

Para obter a parábola são necessários três pontos. Por Lagrange: Seja $p_2(x)$ o polinômio que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$. Temos:

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(2h)(h)} f(x_2)$$

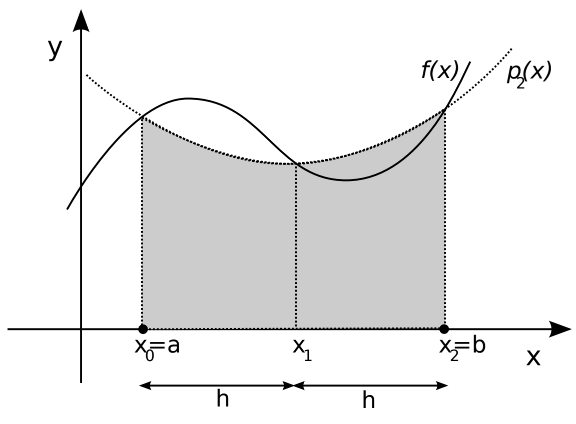
Assim,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx$$

Resolvendo a integral:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big] = I_s$$

Geometricamente:



Então, se dividirmos o intervalo de integração $[a, b] = [x_0, x_n]$ em n subintervalos, onde n é par (necessário, pois cada parábola utiliza 3 pontos), e considerando h constante, temos que uma aproximação para a integral é:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S(h_n) = \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$$

Exemplo 1:

Calcular uma aproximação para $\int_0^1 e^x dx$ usando a Regra de Simpson considerando $n = 6$ com 4 casas decimais.

$h_6 = (1 - 0)/6 = 0.1667$

i	x_i	$f(x_i)$	Coef	$Coef \times f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.1667	1.1814	4	4.7254
2	0.3333	1.3956	2	2.7912
3	0.5	1.6487	4	6.5948
4	0.6667	1.9477	2	3.8954
5	0.8333	2.3009	4	9.2037
6	1	2.7182	1	2.7182
$\sum$				30.9287

Logo:

$$S(h_6) = \frac{0.1667}{3} 30.9287 = 1.7183 \tag{1}$$

E analiticamente teríamos:

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = 1.7183$$

Dica

Podemos seguir com raciocínios semelhantes para interpolar com 4, 5, 6 ... pontos.

Exemplo 2:

Calcular $\int_1^2 x ln(x) dx$ pela regra de Simpson considerando $n = 8$ com 4 casas decimais.

$h_8 = (2 - 1)/8 = 0.125$

i	x_i	$f(x_i)$	Coef	$Coef \times f(x_i)$
0	1	0	1	0
1	1.125	0.1325	4	0.53
2	1.25	0.2789	2	0.5579
3	1.375	0.4379	4	1.7515
4	1.5	0.6082	2	1.2164
5	1.625	0.789	4	3.1558
6	1.75	0.9793	2	1.9587
7	1.875	1.1786	4	4.7146
8	2	1.3863	1	1.3863
$\sum$				15.2711

Logo:

$$S(h_8) = \frac{0.125}{3} 15.2711 = 0.6363 \tag{2}$$

Analiticamente:

$$\int_1^2 x ln(x) dx = \left. \frac{x^2 ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 0.6363$$

1) Calcule as seguintes integrais pela Regra dos Retângulos utilizando $n = 4$ e $n = 6$. Compare os resultados obtidos com os resultados analíticos.

$a) \int_1^2 e^x dx$

$b) \int_1^4 \sqrt{x}\ dx$

$c) \int_2^{14} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3 Licença

Referências

CLAUDIO, D.; MARINS, J. *Calculo numerico computacional: teoria e pratica*. 2. ed. [S.l.]: Atlas, 1994.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.