Zeros de Funções Reais – Isolamento de Raízes

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Zeros de Funções Reais – Isolamento de Raízes

1 Zeros Reais de Funções Reais

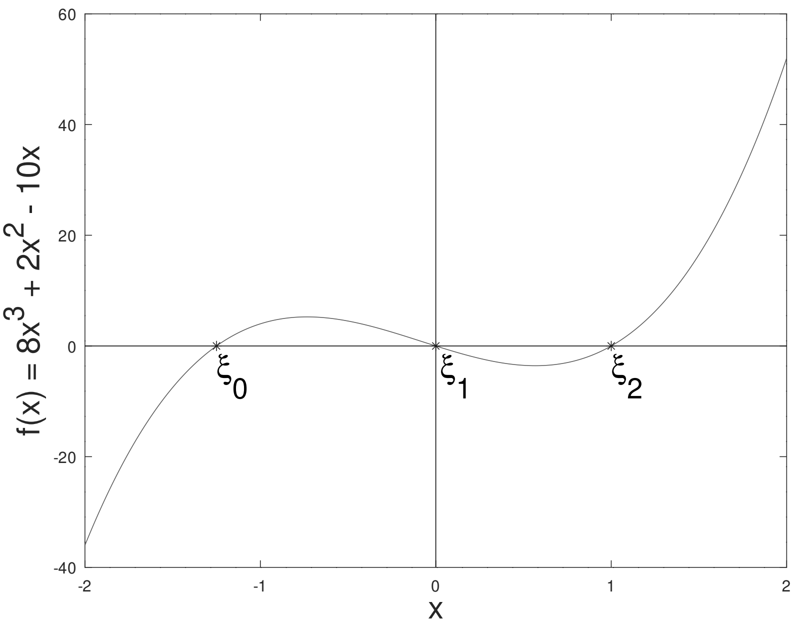
Função real: o domínio da função está nos números reais

Frequentemente nos deparamos com problemas que envolvem a resolução de uma equação do tipo $f(x) = 0$.

Um número real ξ (csi) é um zero da função $f(x)$ ou uma raiz da equação $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$.

Graficamente, os zeros reais são representados pelas abcissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo x.

Exemplo para a função $f(x) = 8x^3 + 2x^2 - 10x$:



Teste Você Mesmo

Você pode utilizar softwares para plotar os gráficos dos exemplos e exercícios para ter uma ideia dos seus comportamentos e entender melhor os conceitos.

Um excelente exemplo é o Octave, que será utilizado para criar muitos dos gráficos que você vai ver durante as aulas. O Octave é gratuito, e possui versões para diversos sistemas operacionais, como Linux, macOS e Windows.

Baixe em <www.gnu.org/software/octave/download>.

Para plotar o gráfico do exemplo no Octave, utilize (note que comandos que começam com # são apenas comentários, e não executam ação alguma):

```
#definindo a função
f = @(x) 8.*x.^3 + 2.*x.^2 - 10.*x;
#Definindo um vetor de valores entre -2 e 2, com passos de 0.01
#O vetor vai conter -2, -1.99, -1.98, -1.97, ..., 2
x = [-2:0.01:2];
#plotando o gráfico de x por f(x)
plot(x, f(x));
```

Para adicionar os "enfeites", como nomes dos eixos e marcações, execute:

```
hold on;
line ([-2 2], [0.0 0.0], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
line ([0 0], [-40.0 60.0], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
plot(-1.25,0,'b*', 0, 0,'b*', 1,0,'b*')
text (-1.25 , -5.5 ,'{\xi}_0','fontsize',20);
text (0.025 , -5.5 ,'{\xi}_1','fontsize',20);
text (1, -5.5 ,'{\xi}_2','fontsize',20);
xlabel("x", 'fontsize',20);
ylabel("{f(x) = 8x^3 + 2x^2 - 10x}", 'fontsize',20);
hold off;
```

Cuidado! Existem aspas simples e duplas nos comandos. Ao copiar os comandos pode ser que o seu leitor de PDFs os interprete como acentos.

Como obter as raízes de uma função $f(x)$ qualquer?

Métodos Diretos: fórmula explícita que resolve o problema em um único passo. Exemplo: Bhaskara:

$$x = \frac{-b + -\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

Problema: pode ser extremamente difícil encontrar os zeros de algumas funções utilizando métodos diretos (ex.: funções de polinômio de grau elevado ou funções transcendentes).

Métodos Iterativos ou Indiretos: Partimos de uma aproximação inicial para a raiz, e refinamos essa aproximação iterativamente.

Dada uma precisão necessária, encontramos aproximações para os zeros.

Os métodos constam de duas fases:

I) Isolamento das raízes: obter um intervalo que contém a raiz;

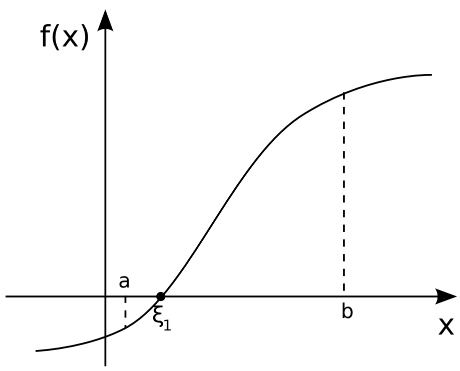
II) Refinamento: Dado o intervalo (aproximação inicial), melhorá-lo sucessivamente até obter uma aproximação dentro da precisão prefixada.

Isolamento das Raízes

Teorema I

Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Se $f(a) * f(b) < 0$ existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é raiz da função.



Note que a condição no Teorema I é apenas suficiente. Caso ela não seja satisfeita, **podemos ou não** ter zeros da função no intervalo.

DICA

Se você quer uma prova desse teorema, pesquise sobre o Teorema de Bolzano.

Teorema II

Se o Teorema I for satisfeito, e se $f'(x)$ existir e preservar o seu sinal no intervalo (a, b), então este intervalo contém um único zero de $f(x)$.

Lembre-se que a derivada nos dá um indicador do crescimento da função. Se ela não muda de sinal no intervalo, quer dizer que os valores de $f(x)$ estão sempre aumentando/diminuindo conforme passamos pelos pontos intermediários entre a e b.

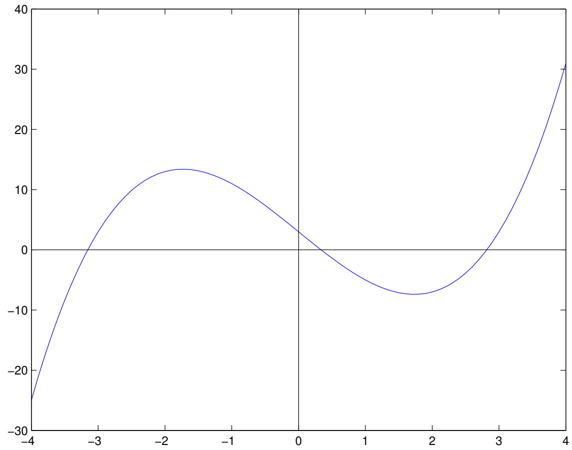
Mais uma vez, a condição do Teorema II é apenas suficiente.

Para definir o intervalo $[a, b]$ podemos tabelar $f(x)$ para vários valores de x e analisar as mudanças de sinal.

Exemplo para $f(x) = x^3 - 9x + 3$:

Construindo a tabela de valores para f(x) considerando **apenas os sinais**:

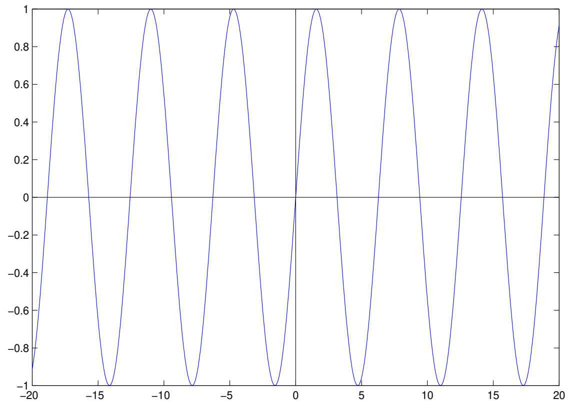
x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+



Observando as variações de sinal, podemos concluir que os intervalos $I_1 = [-5, -3], I_2 = [0, 1]$ e $I_3 = [2, 3]$ contém pelo menos um zero de $f(x)$.

Cuidado:

Devemos tomar cuidado ao selecionar os valores ao construir a tabela. Exemplo com seno:



A função chega a zero em intervalos de π, e se repete a cada 2π, então se montássemos a tabela:

x	$\pi - 1$	$3\pi - 1$	$5\pi - 1$	$7\pi - 1$	$9\pi - 1$	$\ldots$
$f(x) = seno(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Poderíamos pensar que não existem raízes nesses intervalo.

Teste Você Mesmo

Refaça a tabela acima, mas agora considerando os intervalos $\pi - 1, 2\pi - 1, 3\pi - 1, 4\pi - 1, \ldots$

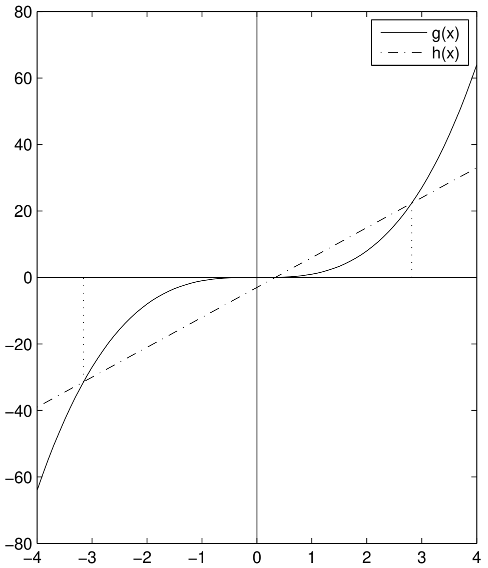
Outra técnica comum é a criação de um esboço do gráfico da função (manualmente, ou via software) para localizar os pontos onde a curva intercepta o eixo **x**.

A partir de uma equação $f(x) = 0$, podemos também obter uma equação equivalente $g(x) = h(x)$. Para encontrar os zeros das funções, ou pelo menos os intervalos aproximados dos zeros, basta esboçar os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos onde as curvas se interceptam, já que nesse caso $f(\xi) = 0 \iff g(\xi) = h(\xi)$.

Exemplo:

$f(x) = x^3 - 9x + 3$

Podemos transformar a equação $f(x) = 0$ em uma equação equivalente $x^3 = 9x - 3$. Neste caso $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$. Esboçando o gráfico:



Logo, $\xi_1 \in (-4, -3)$, $\xi_2 \in (0, 1)$ e $\xi_3 \in (2, 3)$

Teste Você Mesmo

Para esboçar o gráfico acima no Octave, utilize os comandos:

```
f = @(x) x.^3;
g = @(x) 9.*x - 3;
x = [-4:0.01:4];
plot(x,f(x), x, g(x));
grid on;
```

---

2 Exercícios

1) Considere a função $f(x) = 2x^3 - x^2 + 30$. Monte uma tabela contendo vários valores para $f(x)$ e suas trocas de sinal. Através dessa tabela, dê o(s) intervalo(s) (a, b) que contém a(s) raiz(es) da função. O intervalo deve ter um tamanho de no máximo 1 (ou seja, $b - a \leq 1$).

2) Considere a função $f(x) = 2\sqrt{x} - log(x) - 5$. Monte uma tabela contendo vários valores para $f(x)$ e suas trocas de sinal. Através dessa tabela, dê o(s) intervalo(s) (a, b) que contém a(s) raiz(es) da função. O intervalo deve ter um tamanho de no máximo 2 (ou seja, $b - a \leq 2$).

3) Considere a função $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$, onde e é a constante de Euler (considere $e = 2,7182$). Determine funções $g(x)$ e $h(x)$ de forma que $f(x) = g(x) + h(x)$, ou seja, para $f(x) = 0$, $g(x) = h(x)$. Esboce os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$, e através do esboço dê o(s) intervalo(s) (a, b) que contém a(s) raiz(es). O intervalo deve ter um tamanho de no máximo 1 (ou seja, $b - a \leq 1$). Indique as funções $g(x)$ e $h(x)$ que você considerou.

4) Considere a função $f(x) = xlog(x) - 1$. Determine funções $g(x)$ e $h(x)$ de forma que $f(x) = g(x) + h(x)$, ou seja, para $f(x) = 0$, $g(x) = h(x)$. Esboce os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$, e através do esboço dê o(s) intervalo(s) (a, b) que contém a(s) raiz(es). O intervalo deve ter um tamanho de no máximo 1 (ou seja, $b - a \leq 1$). Indique as funções $g(x)$ e $h(x)$ que você considerou.

3 Licença

Referências

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.

SANCHES, I.; FURLAN, D. C. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: UFPR, 2007.