# Método da Bisseção

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

## Conteúdo da Aula

- Método da Bisseção

## 1 Método da Bisseção

Seja uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ e tal que $f(a) \times f(b) < 0$.

Supondo uma única raiz no intervalo $[a,b]$.

O método da bisseção consiste em reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida $\varepsilon$, de forma que $|b-a| < \varepsilon$.

As iterações funcionam da seguinte forma:

Primeira iteração

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} \quad \left\{\begin{matrix} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{matrix}\right\}$$

Segunda iteração

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \quad \left\{\begin{matrix} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{matrix}\right\}$$

Terceira iteração

$$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} \quad \left\{\begin{matrix} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{matrix}\right\}$$

E assim sucessivamente ...

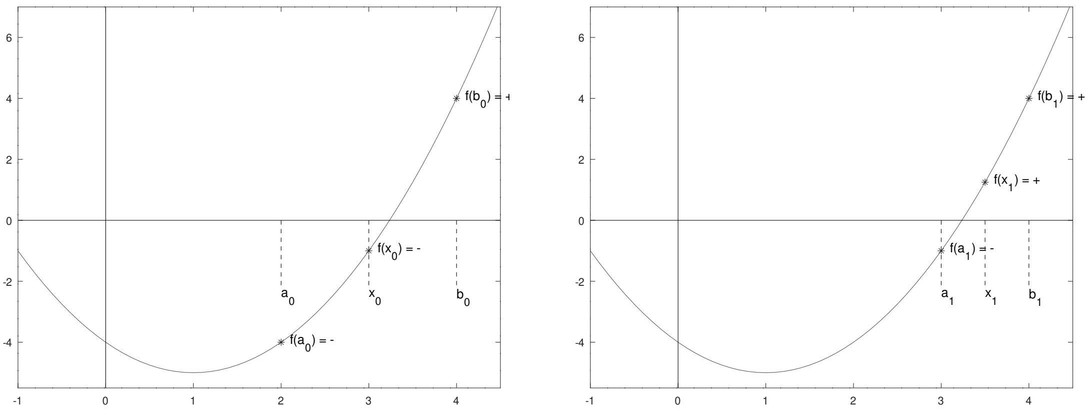
Simplificando:

$x_n = \frac{a+b}{2}$

Como desejamos **manter a troca de sinal no novo intervalo** para garantir a existência de um zero da função no intervalo:

Se $f(a) * f(x_n) < 0$ então $b = x_n$, senão $a = x_n$.

Veja graficamente um exemplo na Figura 1:




(a) Iteração 0

(b) Iteração 1

Figura 1 – Duas iterações para a função $f(x) = x^2 - 2x - 4$ com um intervalo inicial $[2, 4]$.

## Teste Você Mesmo

Abaixo está o script que gera o gráfico da iteração 0 no Octave. Execute e veja você mesmo.

```
f = @(x) x.^2 - 2.*x - 4;
x = [-1:0.1:4.5];
plot(x, f(x));
fontSize = 12;
line([-1 4.5], [0 0], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
line([0 0], [-5.5 8], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
text(2, -2.5 ,'{a}_0','fontsize',fontSize);
text(4, -2.5 ,'{b}_0','fontsize',fontSize);
text((4+2)/2, -2.5 ,'{x}_0','fontsize',fontSize);

line([2 2], [0 -2.2], 'linestyle', '--', 'color', 'black');
line([4 4], [0 -2.2], 'linestyle', '--', 'color', 'black');
line([(4+2)/2 (4+2)/2], [0 -2.2], 'linestyle', '--', 'color', 'black');

hold on;
plot(4, f(4), 'b*', 2, f(2), 'b*', (4+2)/2,f((4+2)/2), 'b*');
hold off;

text(4+0.1, f(4) ,'f({b}_0) = +','fontsize',fontSize);
text(2+0.1, f(2) ,'f({a}_0) = -','fontsize',fontSize);
text((4+2)/2+0.1, f((4+2)/2) ,'f({x}_0) = -','fontsize',fontSize);
axis ([-1, 4.5, -5.5, 7]);
```

Tente alterar o script para plotar o gráfico da iteração 1.

---

**Critério de parada**

As iterações continuam até que se atinja um número máximo de iterações estipulado, ou até que o $|b_n - a_n| < \varepsilon$, onde $\varepsilon$ é a precisão estipulada para o problema.

No método da bisseção podemos escolher qualquer valor dentro do intervalo refinado como o zero da função, de forma que o erro será de no máximo $\varepsilon$.

**Exemplo 1:**

Considere a função $f(x) = x\log(x) - 1$. Aplicar o método da bisseção a esta função no intervalo inicial $[2, 3]$. Utilizar como critério de parada $\varepsilon \leq 0.15$ ou um máximo de 5 iterações.

Primeira iteração

$a_0 = 2; b_0 = 3;$

$x_0 = (2 + 3)/2 = 2.5$

Testando se o intervalo $[a_0, x_0]$ possui troca de sinal. Se posuir, o novo intervalo será $[a_0, x_0]$, caso contrário, será $[x_0, b_0]$.

$f(2) * f(2.5) = -0.3979 * (-)0.00515 = 0,002049 > 0$, logo $a_1 = x_0 = 2.5$

Segunda iteração

$a_1 = 2.5; b_1 = 3;$

$x_1 = (2.5 + 3)/2 = 2.75$

$f(2.5) * f(2.75) = -0.00515 * 0,20816 = -0,001072 < 0$, logo $b_2 = x_1 = 2.75$

Terceira iteração $a_2 = 2.5; b_2 = 2.75;$

$x_2 = (2.5 + 2.75)/2 = 2.625$

$f(2.5) * f(2.625) = -0,00515 * 0,10021 = -0,00052 < 0$, logo $b_3 = x_2 = 2.625$

Como $(2.625 - 2.5) = 0.125 < \varepsilon$, podemos parar com as iterações ao obtermos o intervalo $[2.5; 2.625]$. Sendo assim, ao selecionarmos qualquer número nesse intervalo como raiz, obteremos um erro de no máximo 0.125.

Tomando, por exemplo, o valor 2.55 como raiz, temos $f(2.55) \approx 0.0367$.

**Exemplo 2:**

Considere a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Aplicar o método da bisseção a esta função no intervalo inicial $[0, 1]$. Utilizar como critério de parada $\varepsilon \leq 15 \times 10^{-3}$ ou um máximo de 11 iterações.

| Iteração | $x$ | $f(x)$ | $\|b - a\|$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | -1.375 | 0.5 |
| 2 | 0.25 | 0.765625 | 0.25 |
| 3 | 0.375 | -0.322266 | 0.125 |
| 4 | 0.3125 | 0.218018 | 0.0625 |
| 5 | 0.34375 | -0.0531311 | 0.03125 |
| 6 | 0.328125 | 0.0822029 | 0.015625 |
| 7 | 0.335938 | 0.0144744 | 0.0078125 |
| 8 | 0.339844 | -0.0193439 | 0.00390625 |
| 9 | 0.337891 | -0.00243863 | 0.00195312 |
| 10 | 0.336914 | 0.00601692 | 0.000976562 |

Resposta: $[0.336914, 0.337891]$ obtido na décima iteração.

Tomando $\overline{\xi} = (b-a)/2 = (0.337891+0.336914)/2 = 0.3374025$, temos que $f(\overline{\xi}) = 0.0017876$.

**Convergência**

O método converge para a raiz se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) * f(b) < 0$.

Veja a prova da convergência em Ruggiero e Lopes (1996).

## 2 Exercícios

1) Utilizando o método da bisseção, refinar o intervalo que contém a raiz de $f(x) = x^2 - 3$, considerando $[1, 2]$ como intervalo inicial. O critério de parada é $|b - a| \leq 10^{-2}$, ou um máximo de 8 iterações. Dentro do intervalo refinado, dê a sua aproximação $\overline{\xi}$ para a raiz da função.

2) Utilizando o método da bisseção, refinar o intervalo que contém a raiz de $f(x) = x^2+ln(x)$, considerando $[0.5, 1]$ como intervalo inicial. O critério de parada é $|b - a| \leq 10^{-2}$, ou um máximo de 8 iterações. Dentro do intervalo refinado, dê a sua aproximação $\overline{\xi}$ para a raiz da função.

3) Utilizando o método da bisseção, refinar o intervalo que contém a raiz de $f(x) = e^x + x$, considerando $[-1, 0]$ como intervalo inicial. A condição de parada é $\varepsilon \leq 10^{-3}$, ou um máximo de 4 iterações. Dentro do intervalo refinado, dê a sua aproximação $\overline{\xi}$ para a raiz da função.

## 3 Licença

Esta obra tem a licença Creative Commons "Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional".

## Referências

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.

SANCHES, I.; FURLAN, D. C. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: UFPR, 2007.