Método da Posição Falsa

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

Método da posição falsa

1 Método da Posição Falsa

Seja uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a) \times f(b) < 0$.

Supondo uma única raiz no intervalo $[a, b]$.

O método da bisseção divide o intervalo em dois a cada iteração, no entanto, a raiz pode estar mais próxima de um dos extremos (a ou b).

Para resolver isso, no método da Posição Falsa, utiliza-se uma média ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente. Sendo assim:

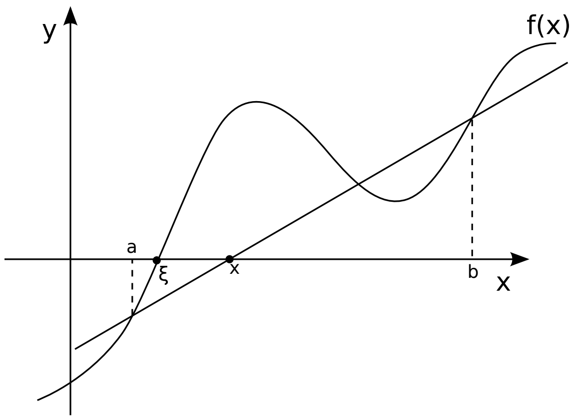
$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} \tag{1}$$

Como $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, podemos simplificar para:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \tag{2}$$

Graficamente, o ponto x é a interseção entre a abcissa e a reta $r(x)$ que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Veja o exemplo na Figura 1.

Figura 1 – Representação Gráfica



O restante do processo segue a mesma lógica do método da bisseção.

Exemplo:

Utilizando o método da posição falsa para $f(x) = x\log(x) - 1$ no intervalo $[2, 3]$:

$[a_0, b_0] = [2, 3]$

Iteração 1

$f(a_0) = -0.3979 < 0$
$f(b_0) = 0.4314 > 0$

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{2 \times 0.4314 - 3 \times (-0.3979)}{0.4314 - (-0.3979)} = \frac{2.0565}{0.8293} = 2.4798 \tag{3}$$

$f(x_0) = -0.0219$ e $f(a) \times f(x_0) > 0$, Logo:

$a_1 = x_0 = 2.4798; b_1 = b_0 = 3$

Iteração 2

$f(a_1) = -0.0219$
$f(b_1) = 0.4314 > 0$

$$x_1 = \frac{2.4798 \times 0.4314 - 3 \times (-0.0219)}{2.4798 \times 0.4314 - (-0.0219)} = 2.5049 \tag{4}$$

$f(x_1) = -0.0011$ e $f(x_0) \times f(a) > 0$, Logo:

$a_2 = x_1 = 2.5049; b_2 = b_1 = 3$

E assim sucessivamente ...

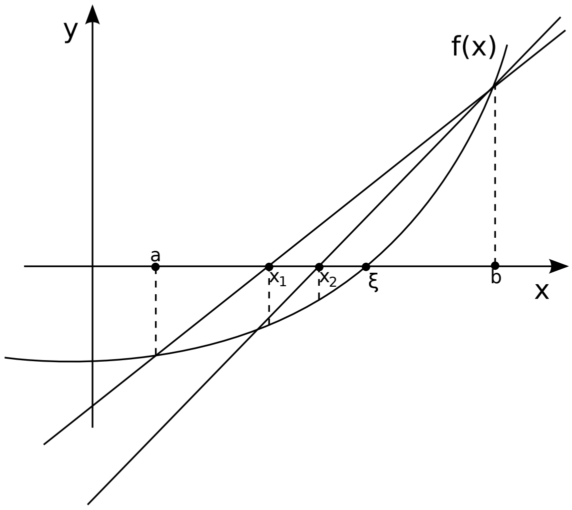
Critérios de parada

Número máximo de iterações
$|b - a| < precis\tilde{a}o$

- Nesse caso tomamos qualquer valor entre a e b como raiz

No entanto somente este critério de parada pode não ser suficiente, como no exemplo a seguir:

Figura 2 – Representação Gráfica



Sendo assim o seguinte critério de parada também se faz necessário.

$|f(x_n)| < erro$

- Nesse caso tomamos x_n como a aproximação $\bar{\xi}$ para a raiz

Como no método da bisseção (e na maioria dos métodos estudados na disciplina), podemos ainda definir um número máximo de iterações. Nesse caso, tome x_n como raiz.

DICA

Colocar um número máximo de iterações é especialmente útil quando utilizamos métodos que podem divergir da solução, para evitarmos possíveis *loops infinitos*.

Mesmo em métodos de convergência garantida, é interessante ter um número máximo de iterações para pouparmos uma quantidade excessiva de trabalho da máquina ou de nós humanos (se estivermos resolvendo no caderno por exemplo).

Convergência

O método converge para a raiz se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$.

Exemplo:

Aplicar o método da posição falsa para $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo $[0, 1]$ até que $|b - a| < 5 \times 10^{-4}$ ou que $|f(x_n)| < 5 \times 10^{-4}$.

Iteração	a	b	x	f(x)	b-a
1	0	1	0.375	-0.322266	1
2	0	0.375	0.338624	-0.0087902	0.375
3	0	0.338624	0.337635	-0.000225884	0.338624

Na iteração 3 $|b-a|$ não satisfaz o critério, porém $f(x_3) < 5 \times 10^{-4}$, logo a raiz aproximada deve ser $\bar{\xi} = x_3 = 0.337635$.

2 Exercícios

1. Utilizando o método da posição falsa, encontre as demais raízes de $f(x) = x^3 - 9x + 3$, que se encontram nos intervalos $[-5, -3]$ e $[2, 3]$. Utilize como critério de parada $|b - a| < 5 \times 10^{-4}$, ou $f(x_n) < 5 \times 10^{-4}$, ou um máximo de 7 iterações. Indique o intervalo final encontrado, e um valor aproximado para a raiz $\overline{\xi}$.

2) Utilizando o método da posição falsa, refinar o intervalo que contém a raiz de $f(x) = x^2 + ln(x)$, considerando $[0.5, 1]$ como intervalo inicial. O critério de parada é $|b - a| \leq 10^{-2}$, ou um máximo de 8 iterações. Dentro do intervalo refinado, dê a sua aproximação $\overline{\xi}$ para a raiz da função.

3) Utilizando o método da posição falsa, refinar o intervalo que contém a raiz de $f(x) = e^x + x$, considerando $[-1, 0]$ como intervalo inicial. A condição de parada é $\varepsilon \leq 10^{-3}$, ou um máximo de 4 iterações. Dentro do intervalo refinado, dê a sua aproximação $\overline{\xi}$ para a raiz da função.

4) Note que os exercícios 2 e 3 são os mesmos solicitados para o método da bisseção. Qual método convergiu mais rapidamente para a resposta?

3 Licença

Referências

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.

SANCHES, I.; FURLAN, D. C. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: UFPR, 2007.