Método do Ponto Fixo

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Método do Ponto Fixo

1 Método do Ponto Fixo (MPF)

Considerando $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$.

No **Método do Ponto Fixo** – também conhecido como Método Iterativo Linear, deve-se transformar a equação em uma equação equivalente na forma $x = \varphi(x)$ (φ lê-se phi).

A partir de uma aproximação inicial x_0 gerar uma sequência x_k de aproximações para a raiz pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$.

A função $\varphi(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$ (ξ lê-se csi) se e somente se $\varphi(\xi) = \xi$

A função $\varphi(x)$ é chamada de **função de iteração**.

Exemplo:

Para a equação $f(x) = x^2 + x - 6$, onde desejamos encontrar as raízes, temos que $x^2 + x - 6 = 0$, ou seja, desejamos encontrar os valores para x, tal que $f(x) = 0$. Nesse caso, temos diversas funções de iteração, dentre elas:

a) $\varphi(x) = 6 - x^2$

Dica

> Fazendo passo a passo: $x^2 + x - 6 = 0$
>
> Desejamos deixar a equação no formato $x = \varphi(x)$, ou seja, isolar um x em um dos lados da equação.
>
> Podemos, por exemplo, passar o "segundo x" para a direita, e obter $x^2 - 6 = -x$
>
> Multiplicando tudo por -1, temos: $x = -x^2 + 6$.
>
> Nesse caso, $\varphi(x) = -x^2 + 6$.

---

b) $\varphi(x) = \pm\sqrt{6 - x}$

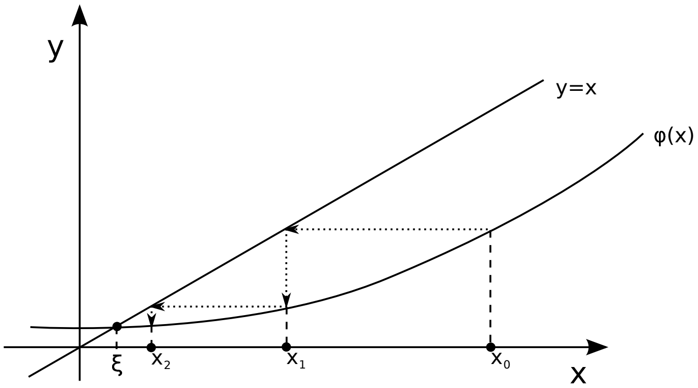
c) $\varphi(x) = \frac{6}{x} - 1$

d) $\varphi(x) = \frac{6}{x+1}$

...

Para uma função $f(x)$, existem **infinitas** funções de iteração $\varphi(x)$ para a equação $f(x) = 0$.

Graficamente, uma raiz ξ da equação $x = \varphi(x)$ é a abcissa do ponto de interseção da reta $y = x$ e da curva $y = \varphi(x)$.



Algoritmo:

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$

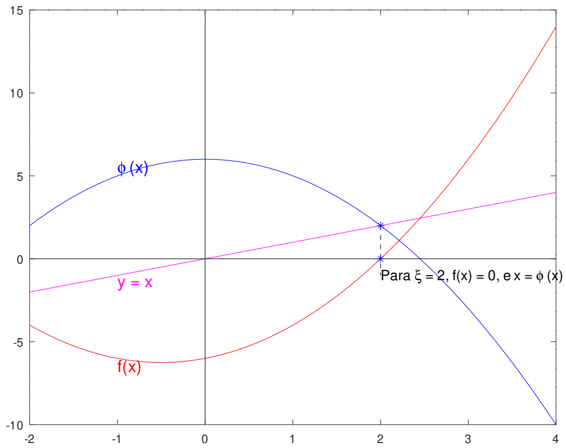
Exemplo:

Encontrar as raízes da equação $x^2 + x - 6$.

Por Bhaskara sabemos que as raízes são $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$ (use esse resultado apenas para comparação, já que na prática, não teríamos esses valores exatos das raízes).

Considerando a função de iteração $\varphi(x) = 6 - x^2$.

Antes de iniciar o exemplo, veja um gráfico contendo $f(x)$, $\varphi(x)$ e a reta $y = x$.



TESTE VOCÊ MESMO

Plote você mesmo esse gráfico no Octave com os comandos:

```
f = @(x) x.^2 +x -6;
p = @(x) 6 - x.^2;
r = @(x) x;
x = [-2.0:0.01:4];
plot(x,f(x),'r', x, p(x),'b', x, r(x),'m');
line([-2 4], [0 0], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
line([0 0], [-10 15], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
hold on;
plot(2, f(2), 'b*', 2, p(2), 'b*');
hold off;
line([2 2], [p(2) -1], 'linestyle', '--', 'color', 'black');
text(2, -1.05 ,'Para {\xi} = 2, f(x) = 0, e x = {\phi}(x)','fontsize',12);
text(-1, f(-1)-0.5 ,'f(x)','fontsize',14, 'color', 'r');
text(-1, -1-0.5 ,'y = x','fontsize',14, 'color', 'm');
text(-1, p(-1)+0.5 ,'{\phi(x)}','fontsize',14, 'color', 'b');
```

Executando o método considerando como "chute inicial" $x_0 = 1.5$:

$x_1 = \varphi(x_0) = 6 - 1.5^2 = 3.75$
$x_2 = \varphi(x_1) = 6 - 3.75^2 = -8.0625$
$x_3 = \varphi(x_2) = -59.003906$
$x_4 = \varphi(x_3) = -3475.4609$
E assim por diante...

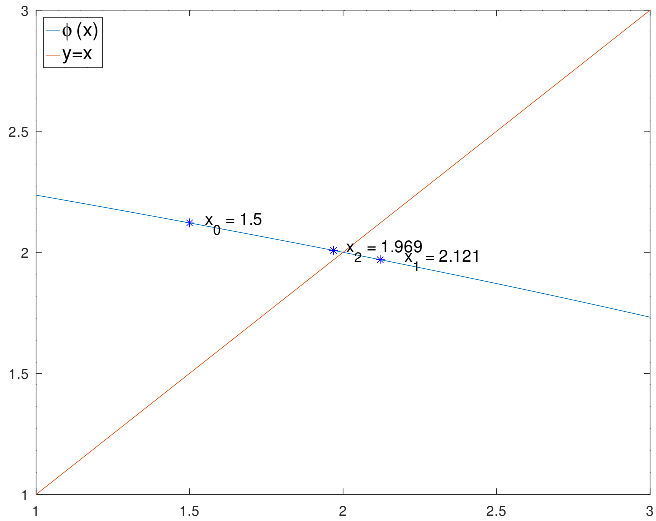
Pode-se observar que a sequência **não** está convergindo para quaisquer das raízes. Ou seja, estamos **divergindo** da resposta.

Utilizando agora $\varphi(x) = \sqrt{6 - x}$.

$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{6 - 1.5} = 2.12132$
$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{6 - 2.12132} = 1.96944$
$x_3 = \varphi(x_2) = 2.00763$
$x_4 = \varphi(x_3) = 1.99809$
$x_5 = \varphi(x_4) = 2.00048$

Logo, a sequência está convergindo para $\xi_2 = 2$.

Veja um gráfico contendo o resultado para as duas primeiras iterações do método:



Teste Você Mesmo

Plote você mesmo esse gráfico no Octave com os comandos:

```
p = @(x) sqrt(6 - x);
r = @(x) x;
x = [1:0.01:3.0];
plot(x, p(x), x, r(x));
handler = legend('{\phi(x)}', 'y=x',"Location",'northwest');
set(handler, "fontsize", 14);
hold on;
plot(1.5, p(1.5), 'b*', 2.121, p(2.121), 'b*', 1.969, p(1.969), 'b*');
hold off;
text(1.55, p(1.5) ,'{x_0} = 1.5','fontsize',12);
text(2.2, p(2.121) ,'{x_1} = 2.121','fontsize',12);
text(2.01, p(1.969) ,'{x_2} = 1.969','fontsize',12);
```

Adicione também o gráfico de f(x) na mesma figura para compreender melhor onde está o zero de f(x).

Convergência

Teorema

Seja ξ uma raiz da equação $f(x)$, isolada num intervalo I centrado em ξ.

Se

i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas no intervalo I.
ii) $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I$
iii) $x_0 \in I$

então sequência x_k converge para a raiz.

Analisando as condições do Teorema para o exemplo anterior:

a) $\varphi(x) = 6 - x^2$ e $\varphi'(x) = -2x$

i) As funções são contínuas.
ii) $|\varphi'(x)| < 1 \Leftrightarrow |2x| < 1 \Leftrightarrow -0.5 < x < 0.5$, logo **não** existe um intervalo contendo $\xi_2 = 2$, tal que $|\varphi'| < 1, \forall x \in I$, o que explica a não convergência.

b) $\varphi(x) = \sqrt{6-x}$ e $\varphi'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$

Dica: Pela Regra da cadeia: $u = 6 - x, du/dx = -1, dy/du = 1/(2 * \sqrt{u}), dy/du * du/dx = -1 * 1/(2 * \sqrt{u}) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$

i) As funções são contínuas em $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 6\}$
ii) $|\varphi'(x)| < 1 \iff |\frac{1}{2\sqrt{6-x}}| < 1 \iff x < 5.75$

Logo, é possível obter um intervalo I, centrado em ξ_2 tal que as condições do teorema sejam satisfeitas (Exemplo $I = (1.5, 2.5)$).

Critérios de parada

$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$ ou se $|f(x_k)| < \varepsilon_2$ ou um número máximo de iterações.

Exemplo:

Utilizando o MPF, encontre a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$, no intervalo $I = (0, 1)$ com $x_0 = 0.5$. Utilize $\varphi(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}$. Critério de parada $|x_k - x_{k-1}| \leq 5 \times 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 5 \times 10^{-4}$

Verificando se $\varphi(x)$ satisfaz o teorema:

$\varphi'(x) = \frac{x^2}{3}$

i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I.

ii) $|\varphi'(x)| < 1 \iff |\frac{x^2}{3}| < 1 \iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

Dica: Para identificar esse intervalo, podemos ignorar o módulo. Para isso, basta observar que $x^2/3$ nunca é negativa se considerarmos os números reais.

iii) $x_0 = 0.5 \in I$

Logo, o teorema é satisfeito

Iteração	x	f(x)
1	0.3472222	-0.8314×10^{-1}
2	0.33799847	-0.3253×10^{-2}
3	0.3376233	-0.12398×10^{-3}

Como $|x_3 - x_2| = |0.3376233 - 0.33799847| < 5 \times 10^{-4}$, $\overline{x} = 0.3376233$ e $f(\overline{x}) = -0.12398 \times 10^{-3}$.

2 Exercícios

1) Considere a função $f(x) = e^{-x^2} - cos(x)$, e o intervalo inicial $I = [1, 2]$. Escolha um x_0 qualquer no intervalo I, e encontre a raiz aproximada da função utilizando o MPF. A função de iteração deve ser $\varphi(x) = cos(x) - e^{-x^2} + x$. Considere os critérios de parada $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 10^{-4}$, ou um máximo de 8 iterações.

2) Considere a função $f(x) = x^2 - 4x - 5$ e o intervalo inicial $I = [-1.5, 1]$. Utilizando como função de iteração $\varphi(x) = (x^2 - 5)/4$, faça o seguinte:

a) Utilizando o Teorema mostrado em aula, mostre se a função garantidamente vai convergir para a raiz ou não.

b) Tomando $x_0 = 0.8$, encontre a raiz aproximada da função utilizando o MPF. Considere os critério de parada $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 10^{-4}$, ou um máximo de 6 iterações.

3 Licença

Referências

PIRES, A. d. A. *Cálculo numérico: prática com algoritmos e planilhas*. [S.l.]: Editora Atlas, 2014. ISBN 9788522498826.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.

SANCHES, I.; FURLAN, D. C. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: UFPR, 2007.