Newton-Raphson

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

2021

Conteúdo da Aula

- Método de Newton-Raphson.

1 Método de Newton-Raphson

Considere $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, e seja ξ uma raiz dessa função tal que $\xi \in (a, b)$.

Da mesma forma que no Método do Ponto Fixo, vamos utilizar uma função de iteração.

A função de iteração é dada por:

$$\varphi(x) = x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, ...$$

Logo, uma das restrições do método é que $f'(x) \neq 0$.

Motivação Geométrica

Estamos trançando tangentes à curva nos pontos $(x_k, f(x_k))$ e encontrando o zero dessa tangente a cada iteração. Veja um exemplo na Figura 1.

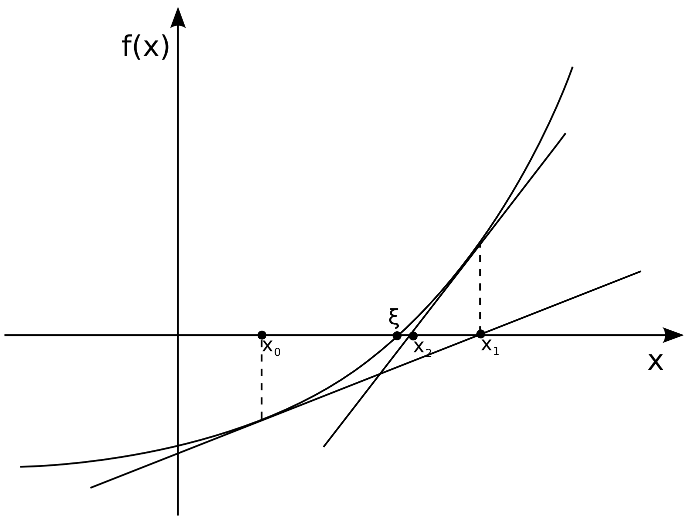


Figura 1 – Motivação Geométrica

Lembre-se de que ao calcular derivada de uma função em um ponto x, estamos calculando a tangente da reta que tangencia a curva em x. Sabemos ainda que:

$$tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \tag{1}$$

A tangente é dada pela derivada em x_k. O cateto oposto é dado pela "altura" da função em x_k, ou seja, $f(x_k)$, e o cateto adjacente, é dado pela distância entre x_k e o ponto que cruza a abcissa x_{k+1}. Substituindo na equação:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \qquad x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2}$$

Exemplo 1:

Considerando $f(x) = x^2 + x - 6$ e $x_0 = 1.5$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$$

Logo

$x_0 = 1.5$
$x_1 = \varphi(x_0) = 1.5 - \frac{1.5^2+1.5-6}{2*1.5+1} = 2.0625$
$x_2 = \varphi(x_1) = 2.00076$
$x_3 = \varphi(x_2) = 2.00000$

Convergência

Dado que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas num intervalo I que contém a raiz de $f(x)$, e supondo que $f'(\xi) \neq 0$, então existe um intervalo $\overline{I} \subset I$, contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \overline{I}$, o método convergirá para a raiz.

Em geral, o método converge desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo" da raiz.

Critérios de parada

$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$ ou se $|f(x_k)| < \varepsilon_2$

Exemplo 2:

Utilizar o método de Newton-Raphson em $f(x) = x^3 - 9x + 3$ com $x_0 = 1.5$ até que $|x_k - x_{k-1}| < 0.01$ ou que $|f(x_k)| < 0.01$.

Observação: A função possui três zeros, $\xi_1 \in (-4, -3)$, $\xi_2 \in (0, 1)$ e $\xi_3 \in (2, 3)$.

$f'(x) = 3x^2 - 9$

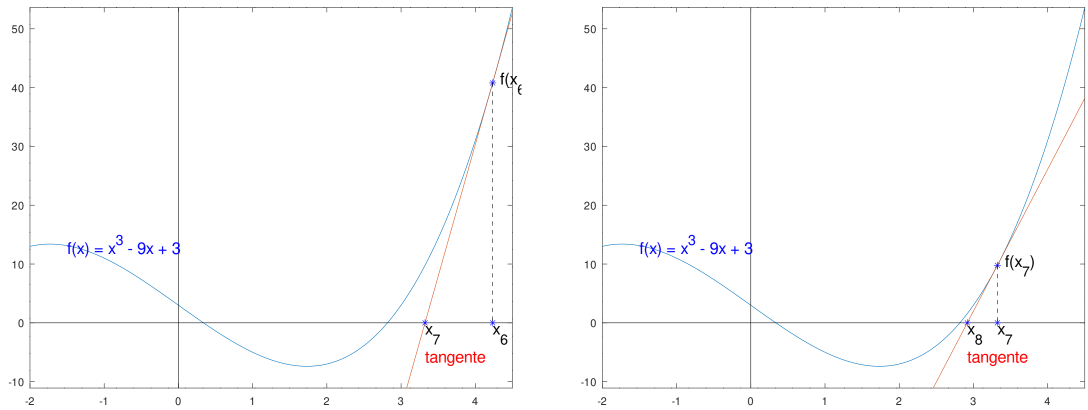
$\varphi(x) = x_{k+1} = x - \frac{x^3-9x+3}{3x^2-9}$

Iteração	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	-1,6667	13,3704	3,1667
2	18,3889	6055,7255	20,0556
3	12,3660	1782,6941	6,0229
4	8,4023	520,5717	3,9637
5	5,8353	149,1821	2,5670
6	4,2339	40,7902	1,6015
7	3,3229	9,7845	0,9110
8	2,9173	1,5730	0,4056
9	2,8222	0,0784	0,0951
10	2,8169	0,0002	0,0053

No início há uma divergência da região onde estão as raízes, isso devido a aproximação inicial ser próxima a $\sqrt{3}$, que é um zero de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Veja graficamente os resultados das iterações 6 e 7 na Figura 2.



(a) Iteração 6.

(b) Iteração 7.

Figura 2 – Iterações 6 e 7 do exemplo.

Teste Você Mesmo

Faça você mesmo esses gráficos no Octave:

```
fontSize = 15;
minx = -2;
maxx = 4.5;
f = @(x) x.^3 - 9.*x + 3;
fl = @(x) 3.*x.^2 -9; #derivada de x
rt = @(x, pt) fl(pt).*(x - pt) + f(pt);#equação da reta tangente ao ponto pt
x_k = 3.3229;
x_k1 = x_k - f(x_k)/fl(x_k);
```

```
x =[minx:0.01:maxx];
fx = f(x);
plot(x, fx, x, rt(x, x_k));
line([minx maxx], [0 0], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
line([0 0], [min(fx)*1.5 max(fx)], 'linestyle', '-', 'color', 'black');
axis ([minx, maxx, min(fx)*1.5 max(fx)]);
hold on;
plot(x_k, f(x_k), 'b*', x_k1, 0, 'b*', x_k, 0, 'b*');
hold off;
line([x_k x_k], [f(x_k) 0], 'linestyle', '--', 'color', 'black');
text(x_k, -2 ,'x_7','fontsize',fontSize);
text(x_k1, -2 ,'x_8','fontsize',fontSize);
text(x_k+0.1, f(x_k) ,'f(x_7)','fontsize',fontSize);
text(-1.5, f(-1.5) ,'f(x) = x^3 - 9x + 3','fontsize',fontSize, 'color', 'blue');
text(x_k1, -6 ,'tangente','fontsize',fontSize, 'color', 'red');
```

CURIOSIDADE

Dado um x qualquer (por exemplo, 3.14), você consegue calcular $\sqrt{x}$ rapidamente de maneira direta? Não? Pois é, o seu computador e calculadora também não sabem fazer isso! Mas podemos calcular pelo método de Newton-Raphson.

Temos que $f(x) = \sqrt{x}$, ou seja, desejamos encontrar um y que é a raiz de x. Então $y = \sqrt{x}$. Elevando os dois lados ao quadrado, temos que $y^2 = x$. Rearranjando, $y^2 - x = 0$, e agora transformamos o problema em encontrar o zero dessa função.

Por exemplo, para calcular $\sqrt{3.14}$, podemos encontrar o valor de y tal que $y^2 - 3.14 = 0$. Para isso, podemos utilizar o método de Newton-Raphson (ou qualquer outro que vimos até agora).

É exatamente isso que o seu computador faz (bem, na verdade ele utiliza alguns algoritmos similares e um pouco mais eficientes para essa tarefa, mas que seguem o mesmo raciocínio – veja uma discussão interessante nessa thread <https://www.quora.com/How-do-computers-calculate-square-roots/answer/Andrew-Bromage?ch=10&share=47d50928>).

Alguns pontos importantes:

1. Custa tempo para o seu computador convergir para a resposta da raiz. Como nossas máquinas são muito rápidas, isso não é problema para programas simples, mas imagine um jogo de videogame, ou uma simulação qualquer, onde precisamos executar bilhões de cálculos por segundo, e esses cálculos podem envolver raízes ou outras funções que dependem de soluções iterativas. Nesses casos, os cientistas/engenheiros devem considerar atalhos e outras saídas para tentar fugir do problema de se calcular essas funções muitas vezes.
2. Você pode se sentir tentado em resolver a equação $y^2 - x = 0$ utilizando Bhaskara, mas isso não faria sentido, especialmente para a máquina. Tente você mesmo encontrar o motivo.

---

2 Exercícios

1) Encontre a raiz de $f(x) = x^4 - 3.14$ utilizando o método de Newton-Raphson. Utilize $x_0 = 1.6$. Como critério de parada utilize $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-3}$ ou se $|f(x_k)| < 10^{-3}$ ou um máximo de 8 iterações.

2) Considere a função $f(x) = 10x^6 - 18x^5 + 3x^2 - 3.14$. Tomando $x_0 = -1.2$, encontre a raiz aproximada da função utilizando o método de Newton-Raphson. Considere os critérios de parada $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 10^{-4}$, ou um máximo de 8 iterações.

3) Considere a função $f(x) = e^{-(x^2)} - cos(x)$, e o intervalo inicial $I = [1, 2]$. Escolha um x_0 qualquer no intervalo I, e encontre a raiz aproximada da função utilizando o método de Newton-Raphson. Considere os critérios de parada $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-4}$ ou $|f(x_k)| \leq 10^{-4}$, ou um máximo de 8 iterações.

Dica: Aplicando a propriedade da soma das derivadas, e uma substituição fazendo $u = g(x) = -x^2$ em conjunto com a regra da cadeia, obtemos $f'(x) = -2xe^{-x^2} + sen(x)$.

3 Licença

Referências

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 3. ed. [S.l.]: Grupo GEN, 2018.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996.

SANCHES, I.; FURLAN, D. C. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: UFPR, 2007.