“Se você realmente quer aprender, você deve montar a máquina e se acostumar com seus detalhes na prática” (Wilbur Wright).

Adição e Subtração

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

DSBD

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Contando em binário e em decimal

Base 10	Base 2
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
...	...

Adições

Realizar uma adição em binário (ou em qualquer outra base) segue o mesmo raciocínio da base 10.

Adições

Realizar uma adição em binário (ou em qualquer outra base) segue o mesmo raciocínio da base 10.

```
 00111001
+00011011
---------
```

Adições

Realizar uma adição em binário (ou em qualquer outra base) segue o mesmo raciocínio da base 10.

```
  111 11
 00111001
+00011011
---------
 01010100
```

Adições

Realizar uma adição em binário (ou em qualquer outra base) segue o mesmo raciocínio da base 10.

```
  111 11
 00111001
+00011011
 01010100
```

Os “vai um” são chamados de **bits de *carry***.

Faça você mesmo

Realize a seguinte soma em binário.

```
 01110001
+11111000
```

Faça você mesmo

Realize a seguinte soma em binário.

```
  1 1 1 1
  01110001
 +11111000
 ---------
 101101001
```

Faça você mesmo

No exemplo, os operandos possuem 8 bits, e o resultado possui 9.

Nono bit gerado devido ao carry final.

No “lápis e papel” isso não é um problema.

Para a **máquina** isso pode ser um **problema sério.**

8 bits

```
  01110001
 +11111000
 ---------
 101101001
```

9 bits

Overflow

Exemplo.

Ao armazenar os valores na memória em duas variáveis de 8 bits cada, e realizar a conta de forma que o resultado seja armazenado em outra variável de 8 bits.

O bit extra vai ser desconsiderado por não caber na região de memória.

O resultado será incorreto.

Ocorreu um **overflow** (transbordo).

Teste você mesmo

```c
#include<stdio.h>
int main(){
	//Em máquinas desktop (x86-64) comumente um char ocupa 8 bits,
	//e um short ocupa 16 bits

	unsigned char var1 = 0b01110001;
	unsigned char var2 = 0b11111000;
	unsigned char resultadoChar;
	unsigned short resultadoShort;

	resultadoChar = var1+var2;
	resultadoShort = var1+var2;

	printf("%u %u\n", resultadoChar, resultadoShort);
	return 0;
}
```

Teste você mesmo

```c
#include<stdio.h>
int main(){
	//Em máquinas desktop (x86-64) comumente um char ocupa 8 bits,
	//e um short ocupa 16 bits

	unsigned char var1 = 0b01110001;//113 na base 10
	unsigned char var2 = 0b11111000;//248 na base 10
	unsigned char resultadoChar;
	unsigned short resultadoShort;

	resultadoChar = var1+var2;
	resultadoShort = var1+var2;

	printf("%u %u\n", resultadoChar, resultadoShort);
	return 0;
}
```

Ao executar, o resultado do programa é
105 361

Quanto isso pode custar

Quanto isso pode custar?

https://youtu.be/PK_yguLapgA

Causado por um overflow.

Quanto isso pode custar

Quanto isso pode custar?

https://youtu.be/PK_yguLapgA

Causado por um overflow.

O overflow foi causado por uma conversão (cast) de uma variável de 64 bits para uma de 16 bits, mas o princípio é o mesmo que estudamos.

Quanto isso pode custar

Quanto isso pode custar?

https://youtu.be/PK_yguLapgA

Causado por um overflow.

O overflow foi causado por uma conversão (cast) de uma variável de 64 bits para uma de 16 bits, mas o princípio é o mesmo que estudamos.

A explosão custou 370 milhões de dólares.

Subtração

```
 10001100
-00111110
```

Subtração

O princípio da subtração também é o mesmo usado na base 10

```
  10001100
- 00111110
  --------
  01001110
```

Outro exemplo

Converta para binário e realize a subtração. Use 8 bits para representar os operandos.

$15_{10} - 42_{10}$

Outro exemplo

Converta para binário e realize a subtração. Use 8 bits para representar os operandos.

$15_{10} - 42_{10}$

$$
\begin{array}{r}
00101010 \\
\underline{-00001111} \\
-00011011
\end{array}
$$

Outro exemplo

Converta para binário e realize a subtração. Use 8 bits para representar os operandos.

$15_{10} - 42_{10}$

$$
\begin{array}{r}
00101010 \\
\underline{-00001111} \\
-00011011
\end{array}
$$

O maior fica na parte superior

Como 15 < 42, o resultado é negativo

Outro exemplo

Converta para binário e realize a subtração. Use 8 bits para representar os operandos.

$15_{10} - 42_{10}$

$$
\begin{array}{r}
00101010 \\
\underline{-00001111} \\
-00011011
\end{array}
$$

O maior fica na parte superior

Como 15 < 42, o resultado é negativo

O computador só representa zeros e uns. **Representar o negativo é um problema**. Vamos discutir isso nas próximas aulas. No papel, você pode usar o símbolo “-” normalmente para indicar um resultado negativo por enquanto.

Multiplicando e dividindo pela base

Na base 10, quando desejamos multiplicar um número por 10, nós simplesmente “deslocamos” o valor para a esquerda e adicionamos um zero no final.

Por exemplo, multiplicar 38 por 10.

38 x 10 = 038 x 10 = 380

Desloca uma vez para a esquerda e completa com zero

Multiplicando e dividindo pela base

O mesmo é válido para outras bases. Em uma base β qualquer, ao se deslocar uma vez o número para a esquerda e completar com zero, estamos multiplicando o valor por β.

Por exemplo, para multiplicar o número 11_2 por 2 basta:

$11_2 \times 2 = 011_2 \times 2 = 110_2$

Multiplicando e dividindo pela base

Continuando com um exemplo na base 2.

Se desejamos multiplicar por 2^n, basta deslocar *n* casas para a esquerda.

Mais uma vez, o mesmo raciocínio que usamos para a base 10.

Exemplo:

$11_2 \times 8 = 11_2 \times 2^3 = 00011_2 \times 2^3 = 11000_2$

Prova

Considere um número *a* qualquer, cuja representação polinomial é:

$a = a_j\beta^j + a_{j-1}\beta^{j-1} + \ldots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0\beta^0$

Ao multiplicar esse número por β^n, onde $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$\beta^n a = \beta^n(a_j\beta^j + a_{j-1}\beta^{j-1} + \ldots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0\beta^0)$

$\beta^n a = a_j\beta^{j+n} + a_{j-1}\beta^{j-1+n} + \ldots + a_2\beta^{2+n} + a_2\beta^{1+n} + a_1\beta^n + 0\beta^{n-1} + 0\beta^{n-2} + \ldots + 0\beta^0$

Prova

Considere um número *a* qualquer, cuja representação polinomial é:

$a = a_j\beta^j + a_{j-1}\beta^{j-1} + \dots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0\beta^0$

Ao multiplicar esse número por β^n, onde $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$\beta^n a = \beta^n(a_j\beta^j + a_{j-1}\beta^{j-1} + \dots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0\beta^0)$

$\beta^n a = a_j\beta^{\boxed{j+n}} + a_{j-1}\beta^{j-1+n} + \dots + a_2\beta^{2+n} + a_2\beta^{1+n} + a_1\beta^n \boxed{+ 0\beta^{n-1} + 0\beta^{n-2} + \dots + 0\beta^0}$

Ao transformar o polinômio para notação posicional, estamos deslocando n casas!

Esses zeros não fazem diferença no polinômio. Foram adicionados para deixar mais claro que na notação posicional completamos com zeros à direita.

Multiplicando e dividindo pela base

Por um raciocínio análogo, podemos fazer uma divisão inteira por 2^n deslocando o número n vezes para a direita, "eliminando" os bits deslocados.

> **A divisão é inteira**, ou seja, a parte fracionária é jogada fora.
>
> > Mais uma vez, o mesmo raciocínio da base 10.

Exemplo: $1111_2/4$

$1111_2 / 4 = 1111_2 / 2^2 = 11_2$

E de que isso importa?

As divisões e multiplicações que aprendemos **só valem quando vamos multiplicar ou dividir por 2^n** (ou por β^n em uma base β qualquer).

Veremos o caso geral da multiplicação nas próximas aulas.

E de que isso importa?

As divisões e multiplicações que aprendemos **só valem quando vamos multiplicar ou dividir por 2^n** (ou por β^n em uma base β qualquer).

Veremos o caso geral da multiplicação nas próximas aulas.

Realizar a multiplicação/divisão por 2^n utilizando deslocamentos é **muito** mais fácil do que uma multiplicação convencional para nós **e para a máquina.**

A maioria dos hardwares implementa deslocamentos de bits internamente.

O processador do seu desktop, notebook, celular, aparelho de microondas, ... sabem fazer isso.

E de que isso importa?

Então, ao multiplicar ou dividir por 2^n, opte por deslocamentos de bits.

Como acessar isso depende da linguagem de programação (mas lembre-se, a linguagem de programação é só uma forma de instruir o hardware a fazer algo).

Em C por exemplo, utiliza-se os operadores >> e <<

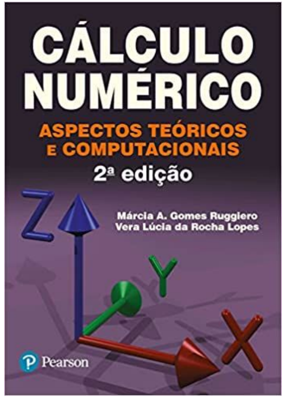
Veja em: *en.wikipedia.org/wiki/Bitwise_operations_in_C#Right_shift_%3E%3E*

Exercícios

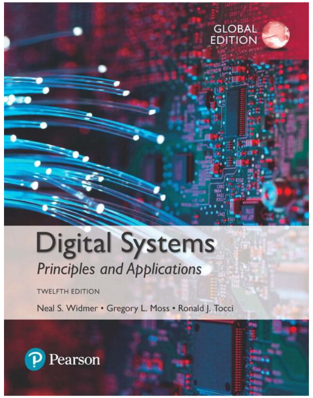
1. Converta os valores a seguir para binário e realize as operações. Para divisões, considere a divisão inteira. Represente os operandos com 8 bits.
   a. 43 + 50
   b. 127 + 128
   c. 255 + 255
   d. 12 - 3
   e. 255 - 127
   f. 128-15
   g. 12 - 128
   h. 14 * 16
   i. 36 / 32
   j. 41 / 64
2. Ao deslocar um valor binário *n* vezes para a esquerda, onde *n* é um número natural, vamos sempre obter um número par? Prove isso, mesmo que informalmente.
3. Ao deslocar um valor binário *n* vezes para a direita, onde *n* é um número natural, vamos sempre obter um número par, ímpar, ou não podemos afirmar algo sobre isso? Argumente.
4. Na aula foi dada uma prova de que para multiplicar um número qualquer em uma base β por $β^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$, basta deslocar as casas *n* vezes para a esquerda. Baseado nessa prova, crie uma equivalente para os deslocamentos à esquerda, relacionando a uma divisão por $β^n$.

Referências

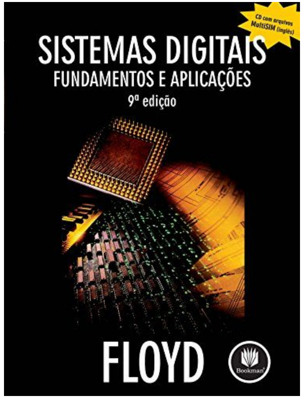
Marcia A. G. Ruggiero, Vera L. R. Lopes. Cálculo numérico aspectos teóricos e computacionais. 1996.



Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



Licença