

“Vocês se mudam para um lugar e se multiplicam, e se multiplicam até que todos os recursos naturais se esgotem ... [agem como] um vírus”
(Agente Smith).

Multiplicação em Binário

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida



Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 321 \\ \hline \end{array}$$

Relembrando

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 321 \\ \hline \end{array}$$

← Multiplicando
← Multiplicador

Relembrando

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 321 \\ \hline 123 \end{array}$$

Relembrando

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 321 \\ \hline \end{array}$$

123

2460

← Desloca uma casa para a esquerda e adiciona um zero.

Relembrando

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 321 \\ \hline 123 \\ +2460 \\ \hline 36900 \\ 39483 \end{array}$$

← Desloca duas casas para a esquerda e adiciona um zero.

Relembrando

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 321 \\ \hline 123 \\ +2460 \\ \hline 36900 \\ 39483 \end{array}$$

Intuição: O produto é **muito** maior do que o multiplicando ou o multiplicador.

Relembrando

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 321 \\ \hline 123 \\ +2460 \\ \hline 36900 \\ 39483 \end{array}$$

Ao se multiplicar um valor que possui m casas por um de n casas, teremos potencialmente um resultado que ocupa $m+n$ casas.

Esse raciocínio se estende para as demais bases.

Overflows são mais prováveis!

Multiplicações

Precisamos compreender todas as intuições no algoritmo de multiplicação na base 10 para transferir o raciocínio para outras bases.

Por que deslocamos cada resultado intermediário para a esquerda?

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 23 \\ \hline \end{array} \longrightarrow (22) \times (23)$$

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 23 \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} (22) \times (23) \\ (22) \times (3+20) \end{array}$$

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 23 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{aligned} &(22) \times (23) \\ &(22) \times (3+20) \\ &(22) \times (3+(2 \times 10)) \end{aligned}$$

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 23 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{aligned} &(22) \times (23) \\ &(22) \times (3+20) \\ &(22) \times (3+(2 \times 10)) \\ &22 \times 3 + 22 \times 2 \times 10 \end{aligned}$$

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 23 \\ \hline 66 \end{array}$$



$$\begin{aligned} & (22) \times (23) \\ & (22) \times (3 + 20) \\ & (22) \times (3 + (2 \times 10)) \\ & \color{red}{22} \times \color{red}{3} + 22 \times 2 \times 10 \end{aligned}$$

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 23 \\ \hline 66 \\ + 44 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{aligned} & (22) \times (23) \\ & (22) \times (3 \times 20) \\ & (22) \times (3 + (2 \times 10)) \\ & 22 \times 3 + 22 \times 2 \times 10 \end{aligned}$$

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 23 \\ \hline 66 \\ + 440 \\ \hline 506 \end{array}$$



$$\begin{aligned} & (22) \times (23) \\ & (22) \times (3+20) \\ & (22) \times (3+(2 \times 10)) \\ & 22 \times 3 + 22 \times 2 \times 10 \end{aligned}$$

Em Binário

O raciocínio em binário (ou em qualquer outra base) é o mesmo.

Realizar as multiplicações, deslocar os bits, e depois somar os resultados intermediários.

Esse algoritmo é usado em nossas máquinas.

O hardware **geralmente** implementa esse algoritmo.

Em hardwares mais sofisticados.

As multiplicações dos bits individuais é feita em paralelo para economizar tempo.

Mas o algoritmo continua sendo o mesmo.

Exemplo

Considere os valores na base 2 (base ocultada para facilitar a visualização).

$$\begin{array}{r} 11101 \\ \times 11110 \\ \hline \end{array}$$

Exemplo

Considere os valores na base 2 (base ocultada para facilitar a visualização).

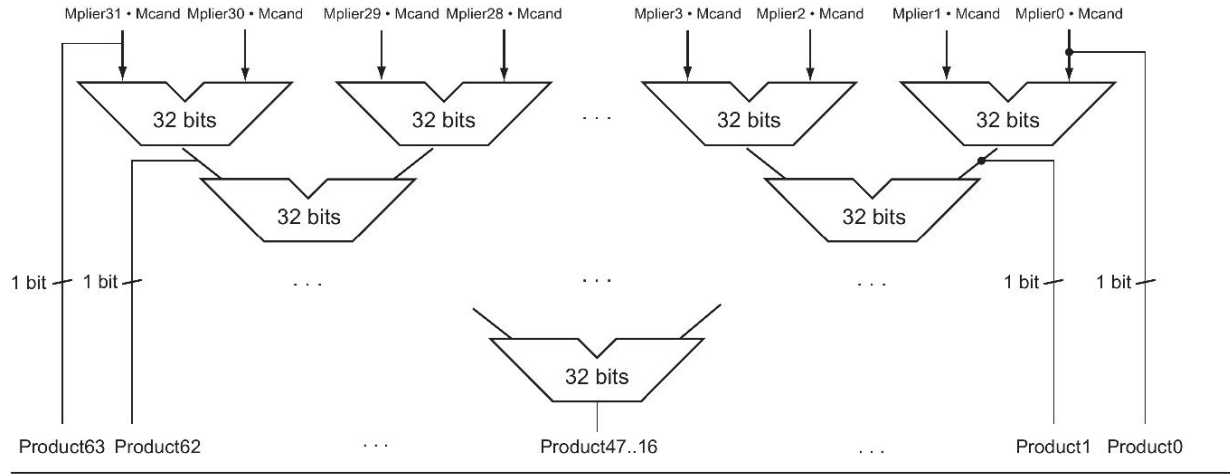
$$\begin{array}{r} 11101 \\ \times 11110 \\ \hline 00000 \\ 11101 \\ 11101 \\ 11101 \\ + \underline{11101} \end{array}$$

Exemplo

Considere os valores na base 2 (base ocultada para facilitar a visualização).

$$\begin{array}{r} 11101 \\ \times 11110 \\ \hline 00000 \\ 11101 \\ 11101 \\ 11101 \\ + 11101 \\ \hline 1101100110 \end{array}$$

Em Paralelo

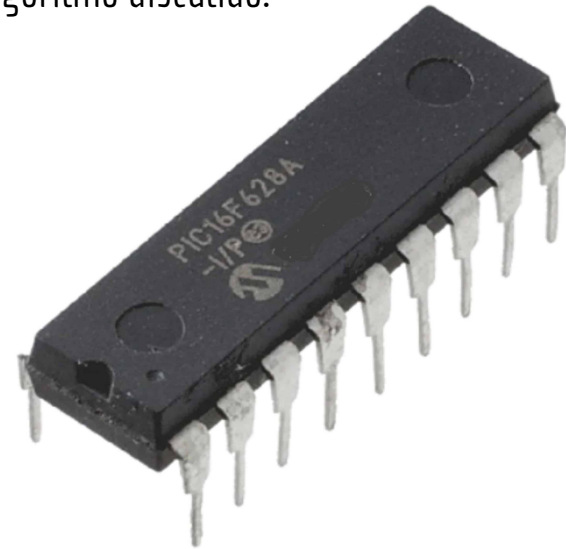


Hennessy, Patterson (2014)

Observações

Alguns processadores, principalmente para sistemas embarcados (ex.: PIC 16F628a), não possuem instruções de multiplicação via hardware.

Se você precisar multiplicar, precisa criar um programa (ex.: função) que executa o algoritmo discutido.



Observações

Realizar divisões em binário seguem raciocínios semelhantes.

Implementamos os mesmos métodos utilizados na base 10.

Exercícios

1. Realize as seguintes multiplicações:

a. $11111_2 * 1100_2$

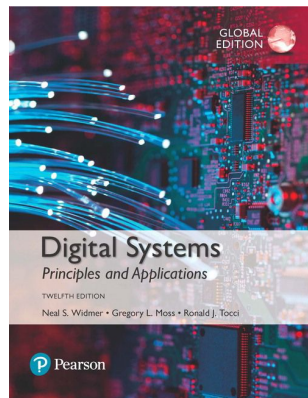
b. $111100_2 * 111110_2$

c. $100000_2 * 11_2$

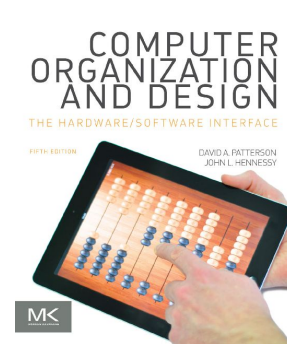
d. $111111_2 * 1000_2$

Referências

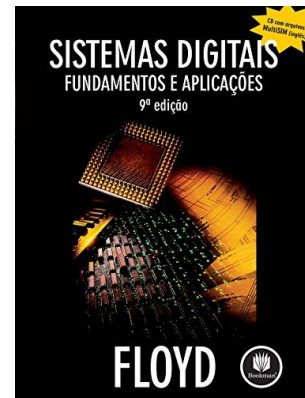
Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Hennessy, J. L., Patterson, D. A. Computer Organization and Design: The Hardware/Software Interface. 2014.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



Licença

Esta obra está licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).