

Se parece fácil demais, algo deve estar errado.

Derivando Expressões

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

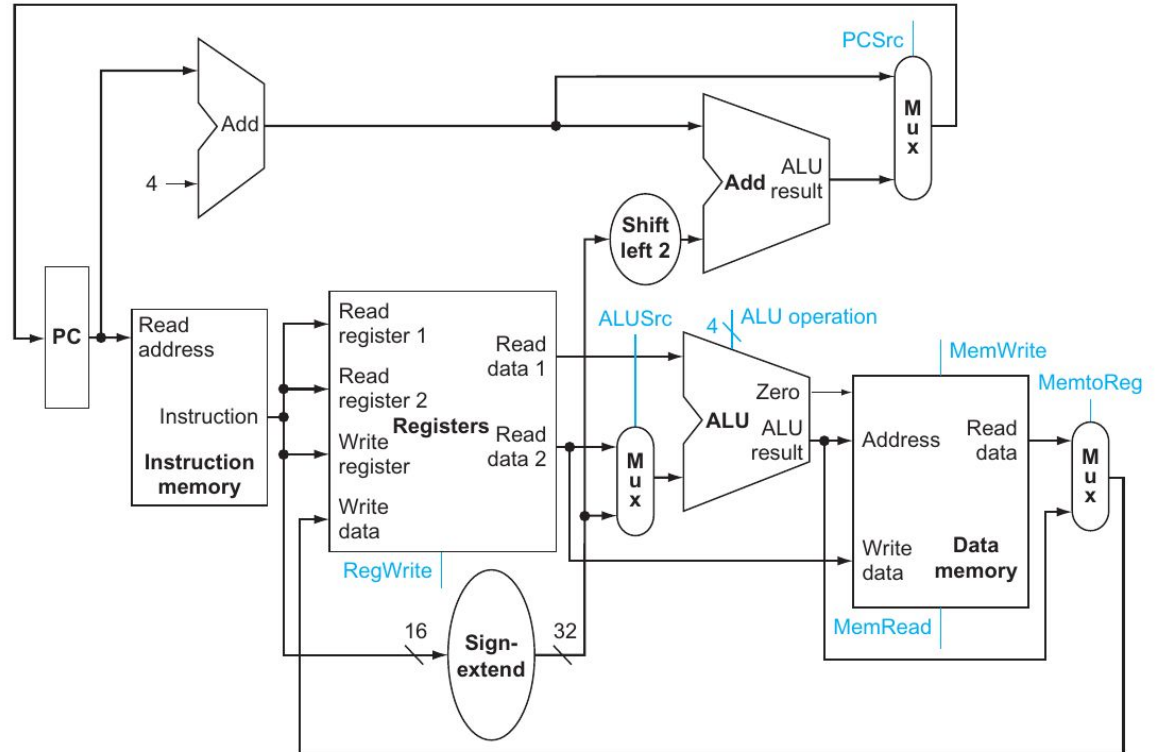


Derivando expressões

No mundo real, é muito comum termos apenas as tabelas verdade.

A partir da tabela verdade, precisamos derivar uma expressão lógica.

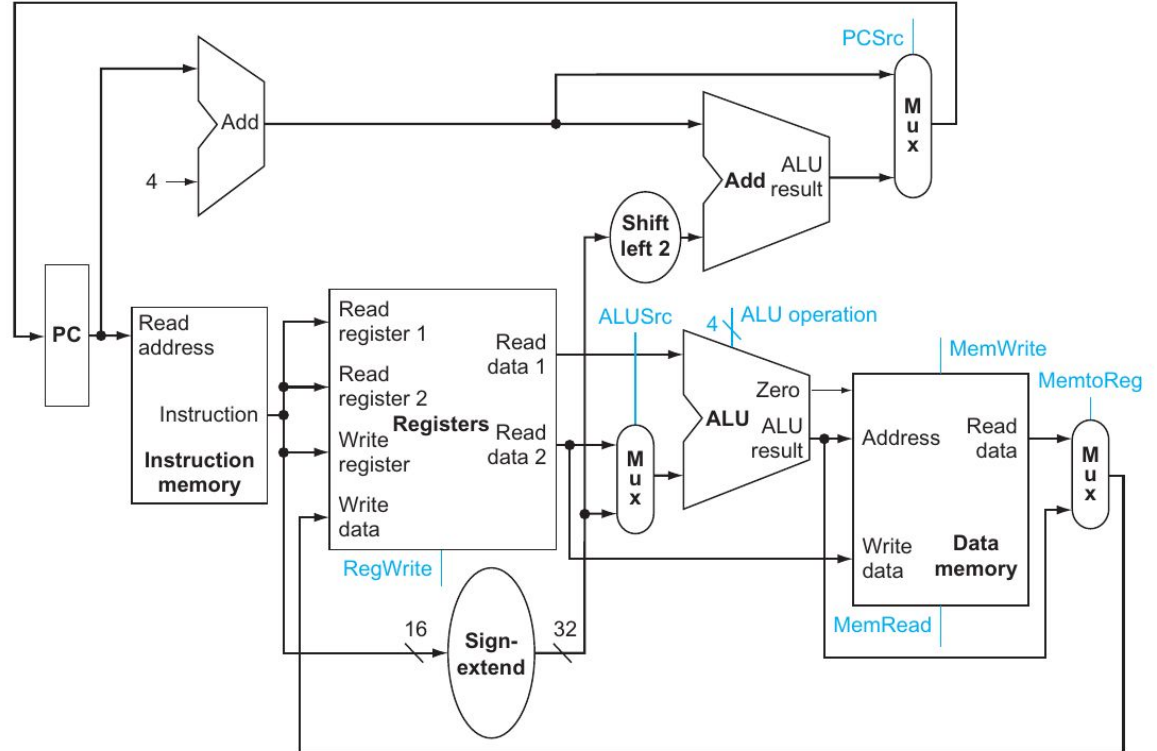
Um Exemplo



Um Exemplo

Não se assuste!

Esse é o esquema de uma CPU Simples.



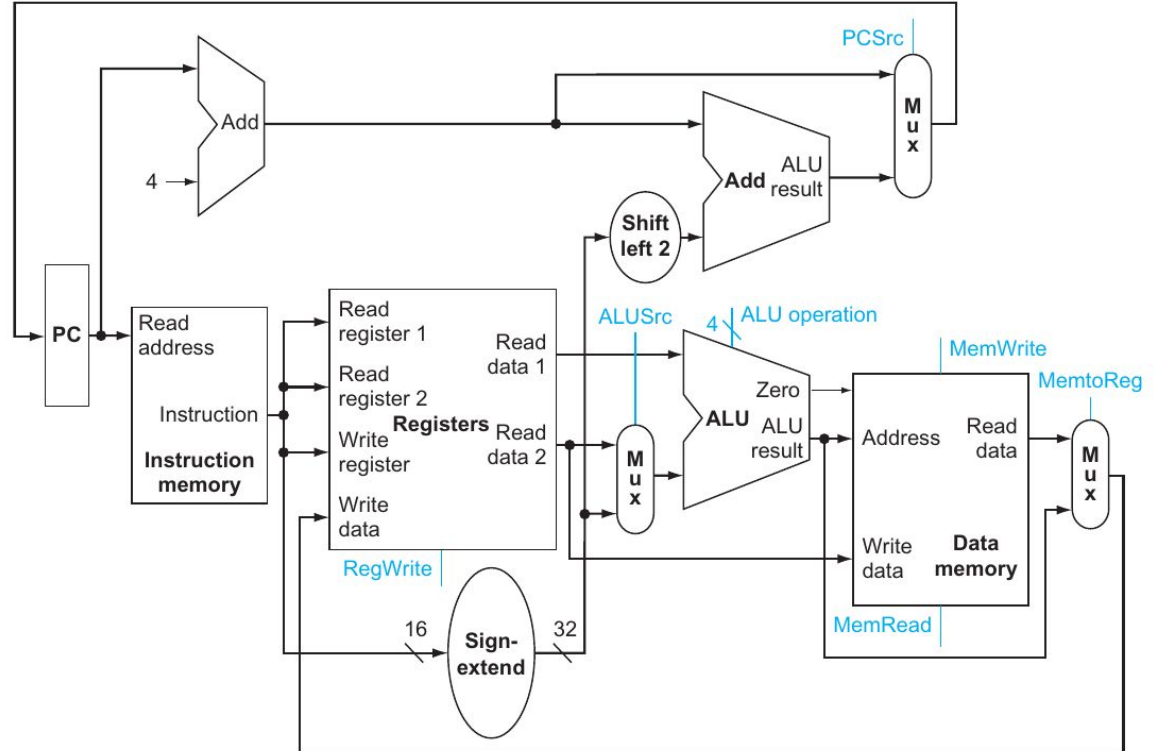
Um Exemplo

Não se assuste!

Esse é o esquema de uma CPU Simples.

Você não precisa entender o esquema completo.

Vai aprender em Arquitetura de Computadores.



Um Exemplo

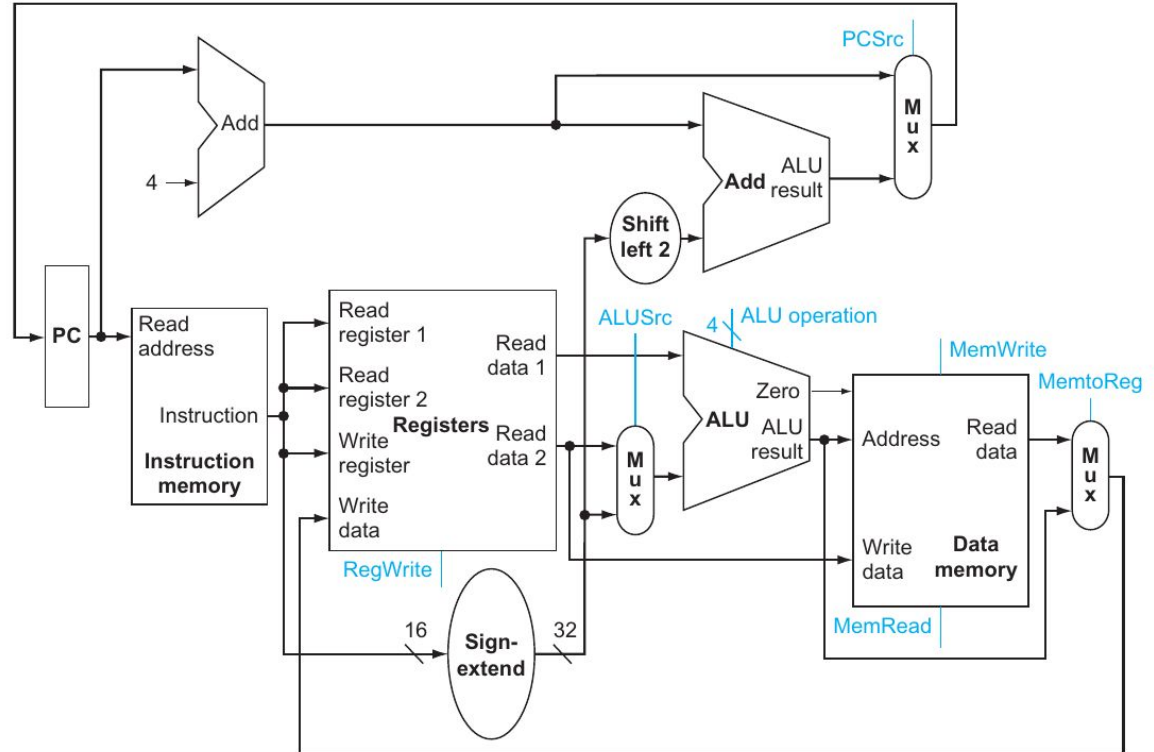
Não se assuste!

Esse é o esquema de uma CPU Simples.

Você não precisa entender o esquema completo.

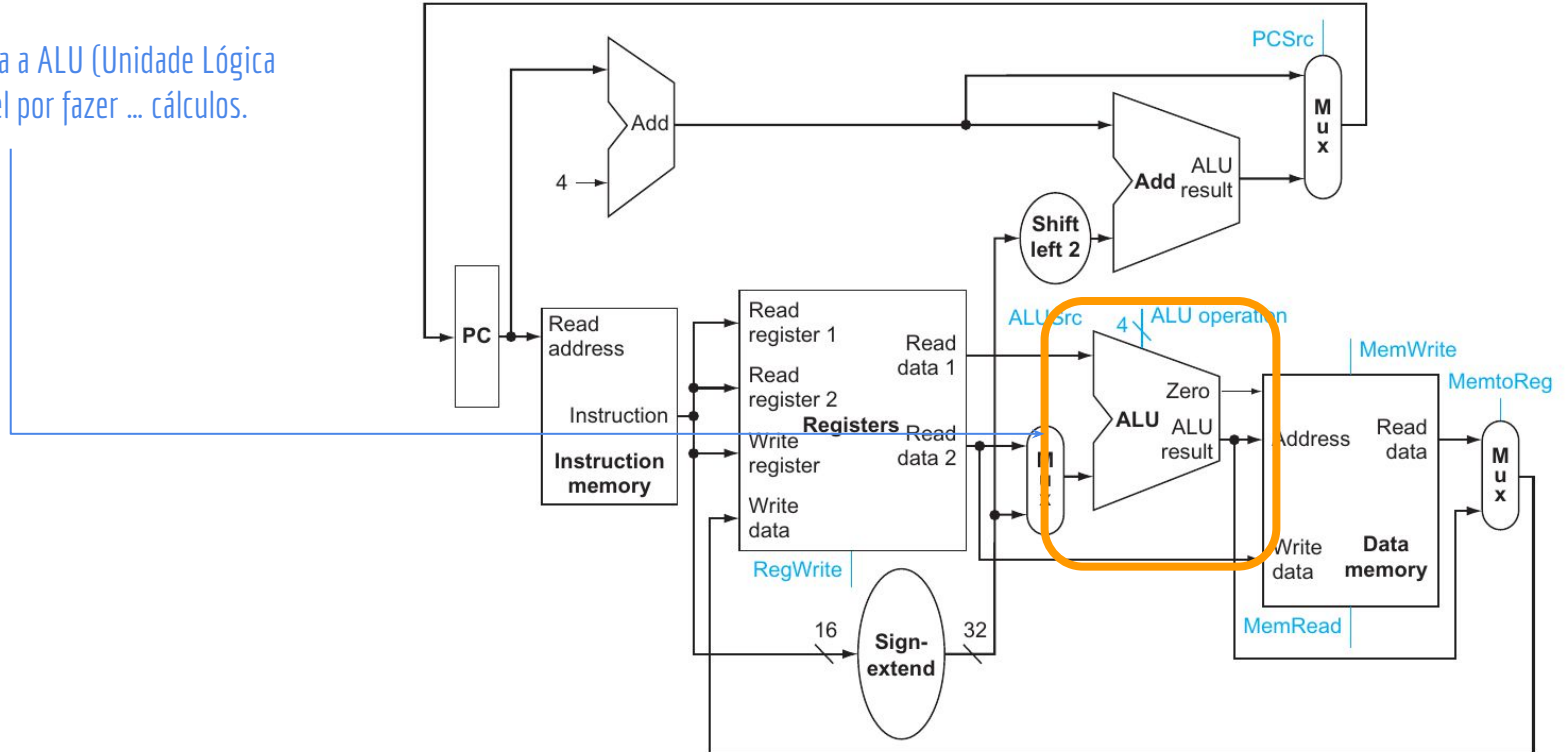
Vai aprender em Arquitetura de Computadores.

Vamos usar apenas um trecho para um exemplo do mundo real.



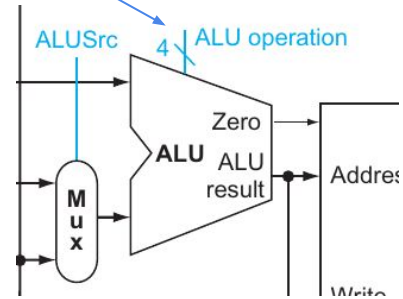
Um Exemplo

Esse símbolo representa a ALU (Unidade Lógica Aritmética), responsável por fazer ... cálculos.



Um Exemplo

A ALU recebe quatro variáveis booleanas, que indicam o que ela precisa fazer (uma soma, uma multiplicação, uma conjunção, uma disjunção, ...)



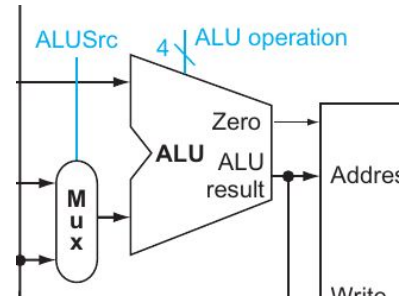
Um Exemplo

A ALU recebe quatro variáveis booleanas, que indicam o que ela precisa fazer (uma soma, uma multiplicação, uma conjunção, uma disjunção, ...)

Vamos criar uma função que indica se o somador da ALU precisa ser ativado (verdadeiro) ou não (falso).

Essa função pode ser implementada no circuito, para comandar o somador da ALU.

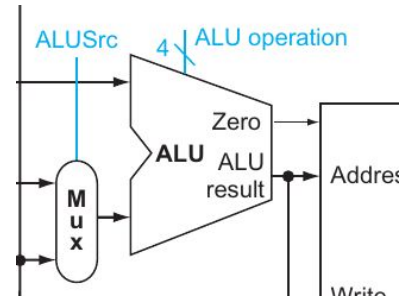
Veremos como fazer essas implementações no futuro.



Um Exemplo

De acordo com a especificação da CPU, as quatro variáveis booleanas que controlam a operação ativam o somador de acordo com a seguinte tabela verdade.

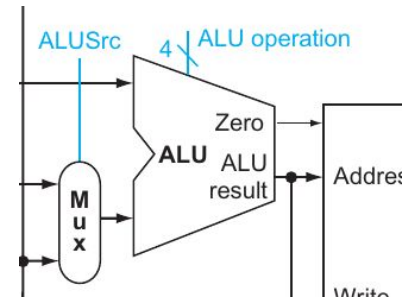
Não vamos nos preocupar nesse exemplo sobre o exato motivo dessas variáveis ativarem ou não o somador. Se você quiser ver esses detalhes, leia em Hennessy, Patterson (2014).



Um Exemplo

S indica se o somador deve ser ativado ou não de acordo com as variáveis A, B, C e D.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0



Problema

Temos uma tabela verdade, mas precisamos definir uma função booleana a partir dela.

Forma Normal Disjuntiva

A Forma Normal Disjuntiva (FND) também é conhecida como:

Soma dos Produtos.

Soma de Mintermos.

Forma Normal Disjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 1 como resposta.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Forma Normal Disjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 1 como resposta.

Faça o produto (conjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 0 nessa linha.

O produto das variáveis é denominado **mintermo** ou **minitermo**.

Mintermo Mintermo Mintermo

↓ ↓ ↓

$\bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$ $\bar{A}.B.C.\bar{D}$ $\bar{A}.B.C.D$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Forma Normal Disjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 1 como resposta.

Faça o produto (conjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 0 nessa linha.

O produto das variáveis é denominado **mintermo** ou **minitermo**.

Faça a soma (disjunção) dos mintermos.

$$S = \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.D$$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Disjuntiva.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Disjuntiva.

$$F = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

A Forma Normal Conjuntiva (FNC) também é conhecida como:

- Produto das Somas.

- Produto de Maxtermos.

- Forma **dual** da soma dos produtos.

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

$$S = A+B+C \quad A+B+\bar{C} \quad \bar{A}+B+C \quad \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

Faça multiplicação (conjunção) dos mintermos.

$$S = A+B+C \cdot A+B+\bar{C} \cdot \bar{A}+B+C \cdot \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

Faça multiplicação (conjunção) dos mintermos.

Tem algo errado aqui!

$$S = A+B+C \cdot A+B+\bar{C} \cdot \bar{A}+B+C \cdot \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

Faça multiplicação (conjunção) dos mintermos.

$$S = (A+B+C).(A+B+\bar{C}).\bar{A}+B+C.(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Conjuntiva.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Conjuntiva.

$$F = (\bar{A}+B+C).(\bar{A}+B+\bar{C}).(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

FORMAS CANÔNICAS

Tanto a FND quanto a FNC são **formas canônicas** ou **formas padrão**.

Simplificações

As formas canônicas são úteis e simples para, por exemplo, encontrarmos a função booleana através de sua tabela verdade.

Mas a implementação dessas funções requer muitas portas lógicas.

Podemos simplificar as expressões através de, por exemplo.

- Mapas de Karnaugh.

- Teoremas e Postulados da Álgebra de Boole.

Veremos adiante...

Exercícios

1. Derive a expressão para o somador do primeiro exemplo usando a Forma Normal Conjuntiva.
2. Faça a soma dos produtos e o produto das somas para a tabela verdade ao lado.

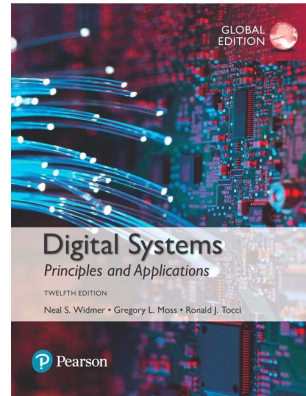
Solução na Seção 4-4 de Tocci et al.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

3. Crie uma tabela verdade com:
 - a. Pelo menos 3 variáveis
 - b. Uma função de saída F
 - c. Faça a soma dos produtos e o produto das somas para essa tabela verdade.

Referências

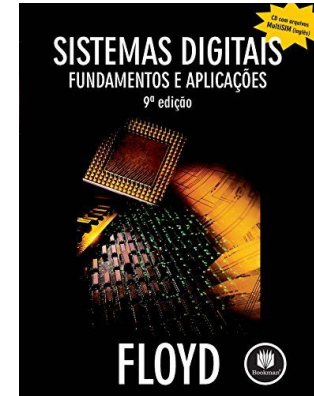
Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Hennessy, J. L., Patterson, D. A. Computer Organization and Design: The Hardware/Software Interface. 2014.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



Licença

Esta obra está licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).