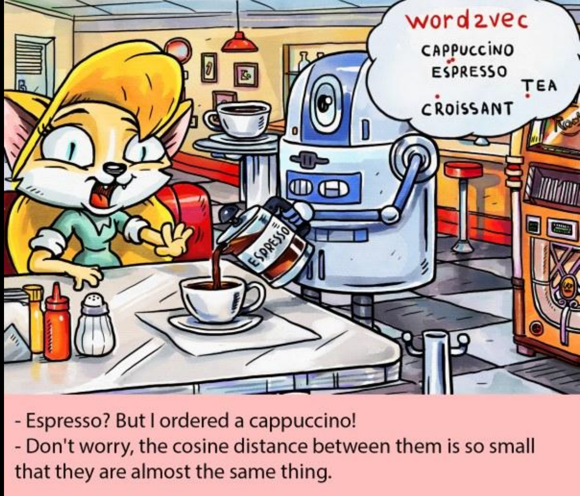


@data_monsters

Vetores e seus usos em ML

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

DSBD

UFPR

Antes de começar

Vamos rever alguns conceitos de Álgebra Linear.

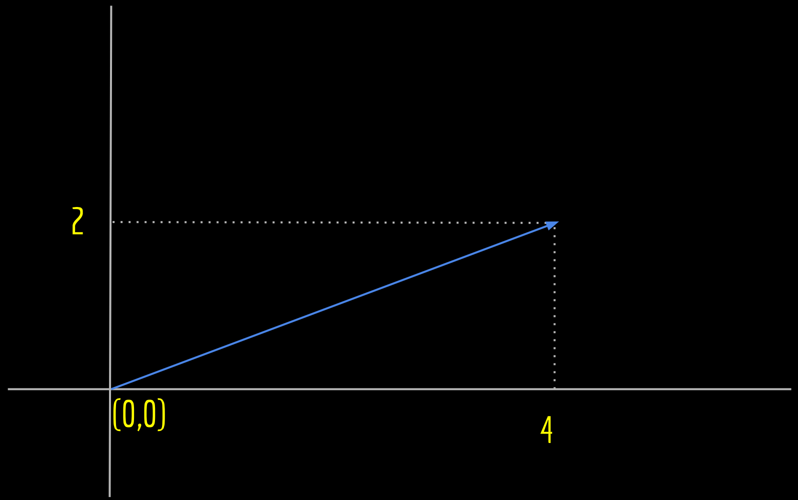
Vetores

Um vetor $\vec{v}$ é algo que possui direção, sentido e módulo (tamanho).

Todos os vetores de mesma direção e magnitude são iguais.

Geralmente representamos um vetor como uma seta que parte da origem (vetores que não parte da origem são livres).

Exemplo em $\mathbb{R}^2$.



Vetores

Num espaço $\mathbb{R}^n$, um vetor $\vec{v}$ é representado por

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

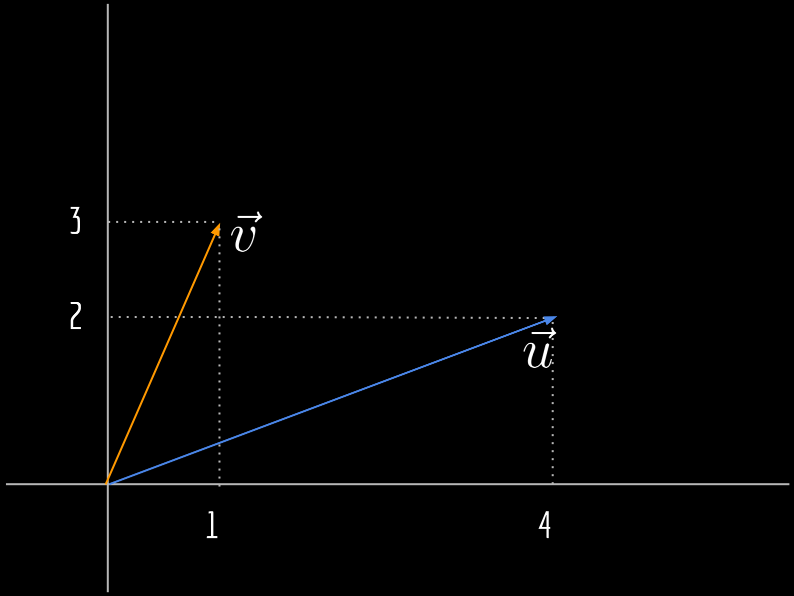
Indicando que o vetor se estende da origem até v_1, v_2, ..., v_n

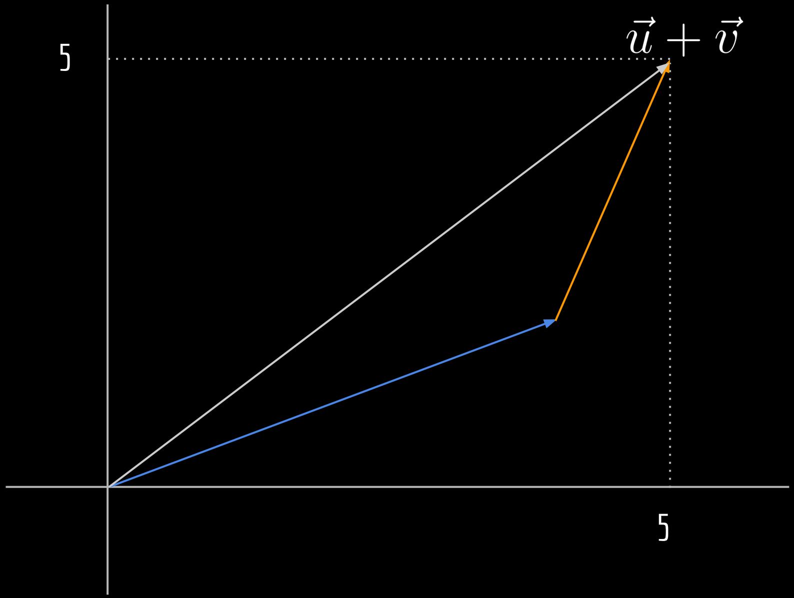
Faça você mesmo #1

Use o exemplo disponibilizado no Google Colab para plotar alguns vetores em um plano $\mathbb{R}^2$.

Soma de vetores

A soma de dois vetores intuitivamente nos dá um vetor que é igual a “soma dos deslocamentos e direções” dos vetores originais.





Soma de vetores

A soma de dois vetores intuitivamente nos dá um vetor que é igual a “soma dos deslocamentos e direções” dos vetores originais.

Matematicamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \dots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Faça você mesmo #2

Modifique o bloco de código anterior para mostrar a soma de alguns vetores.

Pesquise como fazer a soma de vetores usando numpy.

Módulo ou Norma

O módulo (norma) de um vetor $\vec{v}$ é denotado por $||\vec{v}||$.

Podemos calcular por Pitágoras.

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

No numpy, basta chamar a função.

```
np.linalg.norm(vec)
```

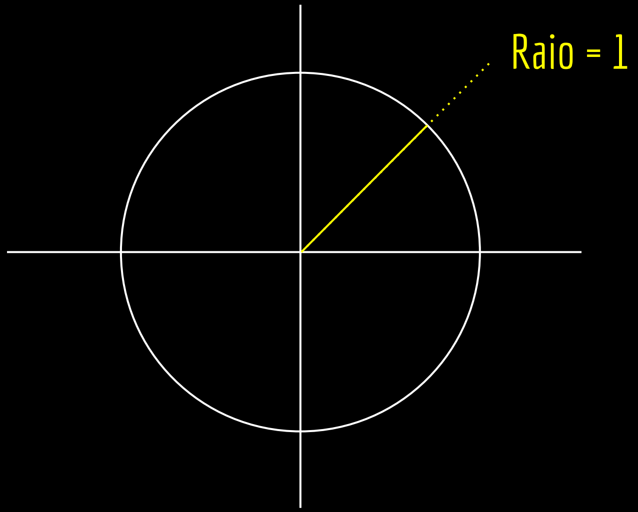
Faça você mesmo #3

Calcule o módulo dos vetores criados anteriormente.

Utilize a função `np.linalg.norm(vec)`.

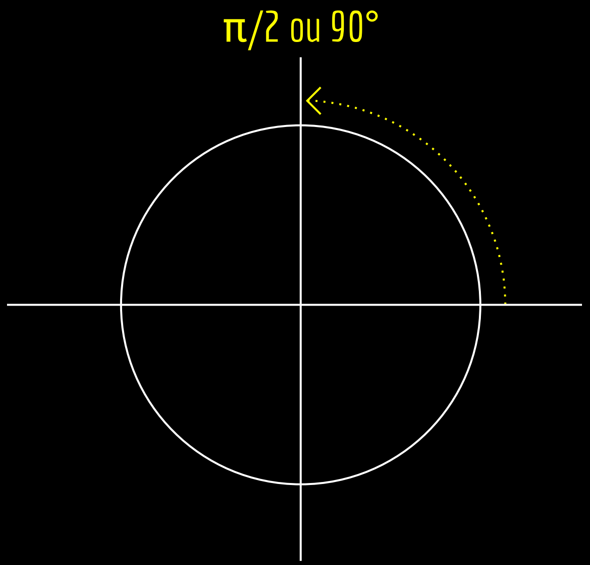
Relembrando

Ciclo trigonométrico em um plano cartesiano.



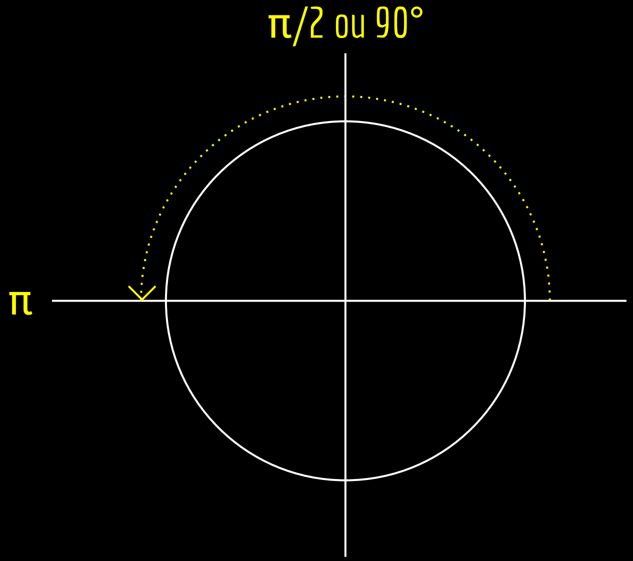
Relembrando

Ciclo trigonométrico em um plano cartesiano.



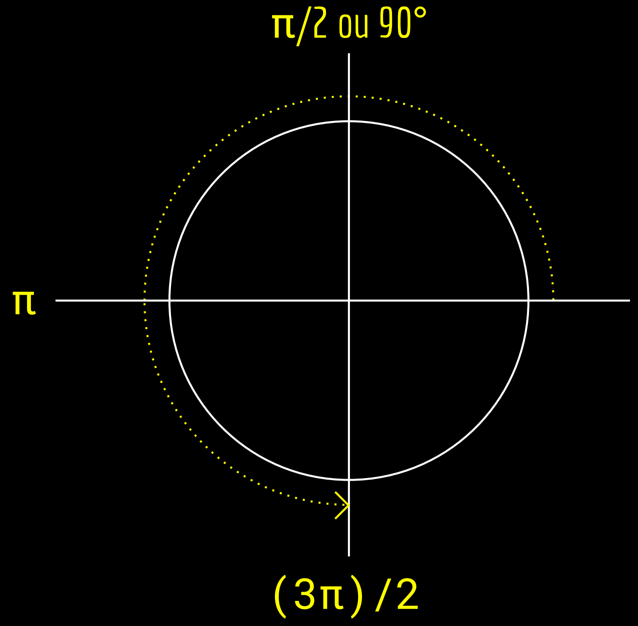
Relembrando

Ciclo trigonométrico em um plano cartesiano.



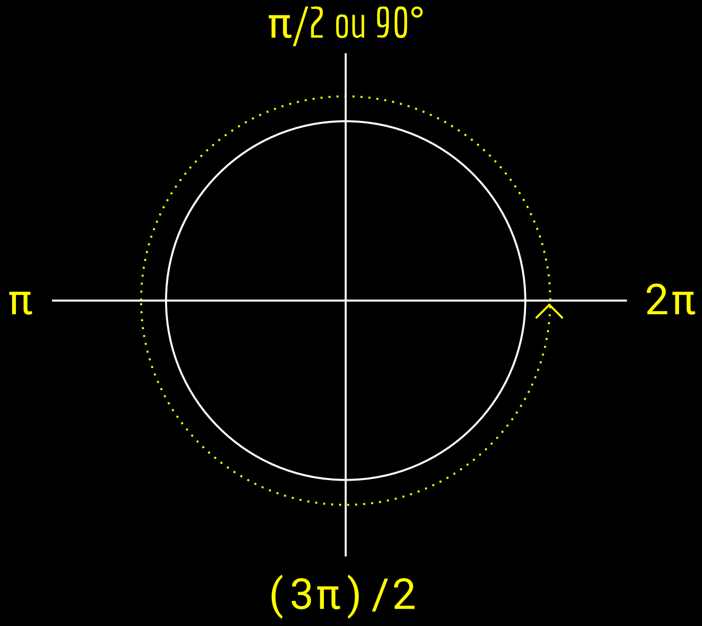
Relembrando

Ciclo trigonométrico em um plano cartesiano.



Relembrando

Ciclo trigonométrico em um plano cartesiano.

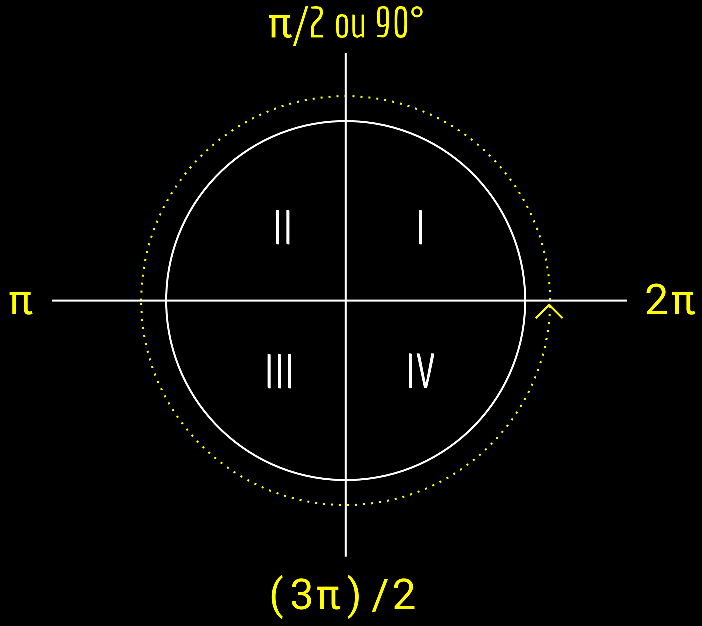


Faça você mesmo #4

Execute o programa que gera o gráfico da função cosseno.

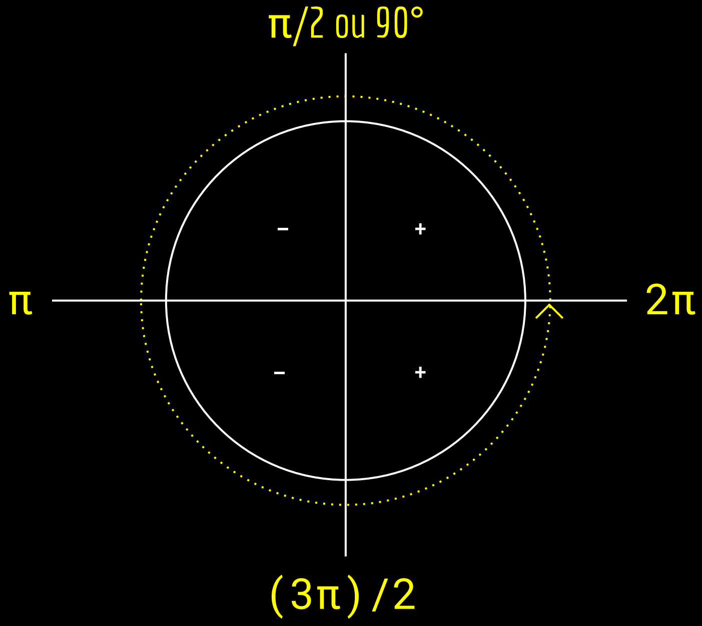
Relembrando

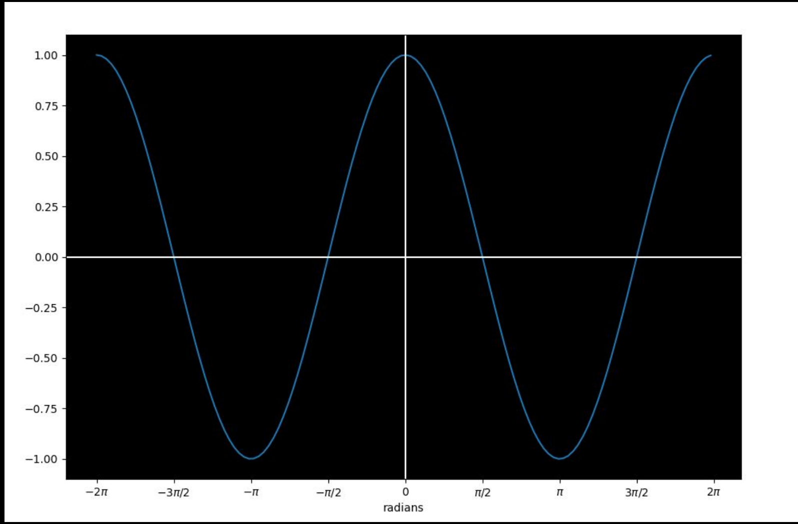
Em quais quadrantes a função é positiva?



Relembrando

Em quais quadrantes a função é positiva?





Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ é um escalar, calculado como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Note que o produto escalar é o mesmo que realizar a multiplicação dos vetores na forma

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$$

Onde $\boldsymbol{u}^T$ indica a transposta do vetor $\vec{u}$.

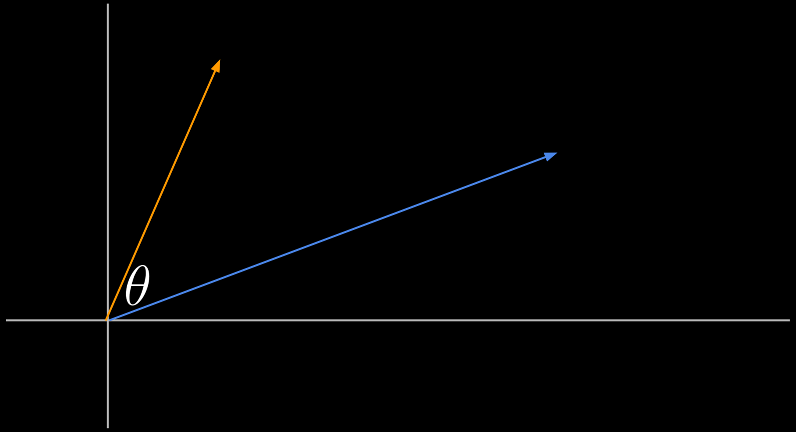
Produto escalar

O produto escalar está relacionado ao módulo e ao ângulo entre os vetores.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||cos\theta$$

Onde θ é o ângulo entre os vetores em radianos.

Note que o produto escalar entre vetores ortogonais é **zero**.



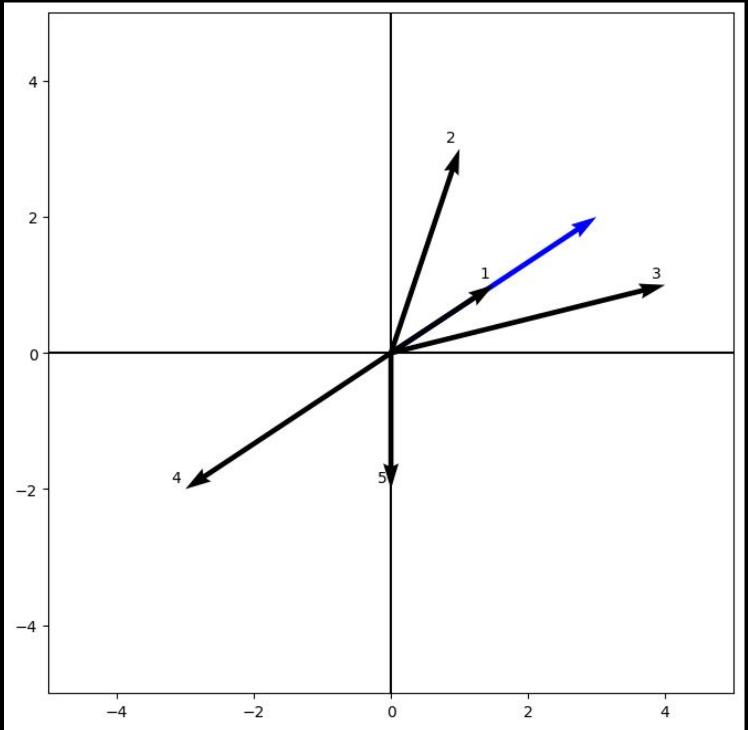
Faça você mesmo

Considere o vetor azul a seguir.

Ao realizar o produto escalar de cada um dos vetores, de 1 a 5, quais produtos escalares serão positivos, negativos, ou zero?

Lembre-se que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| cos\theta$$



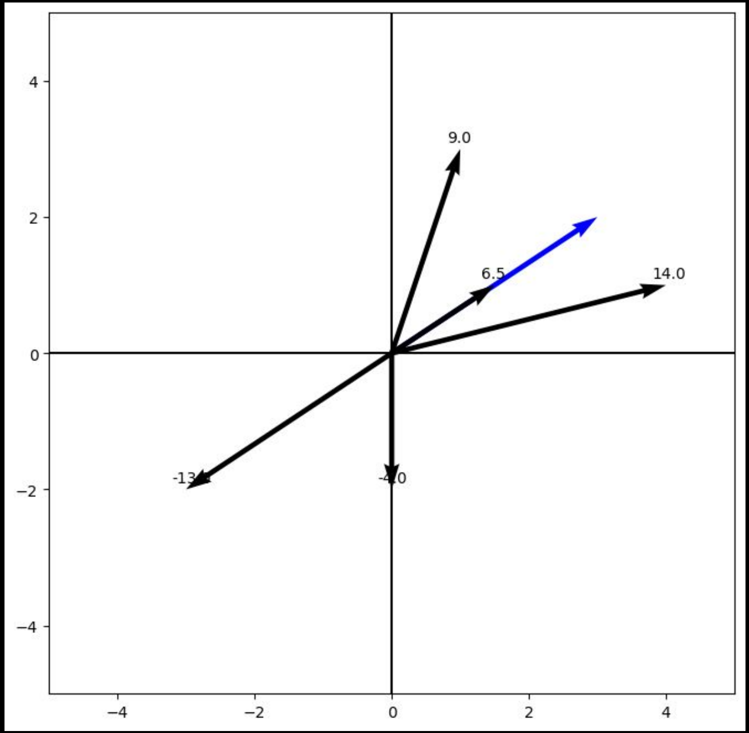
Resposta

Considere o vetor azul a seguir.

Ao realizar o produto escalar de cada um dos vetores, de 1 a 5, quais produtos escalares serão positivos, negativos, ou zero?

Lembre-se que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||cos\theta$$



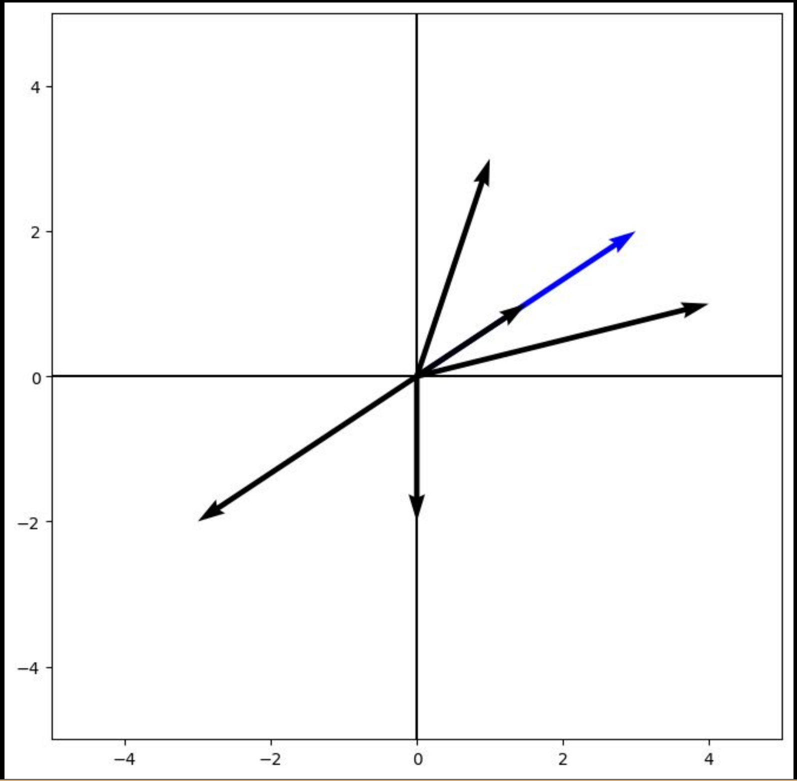
Fronteira

Vamos usar o vetor azul do exemplo para definir uma fronteira.

Vamos definir o vetor como $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$

Dados que apontam para a mesma direção ou são ortogonais a $\vec{w}$ serão definidos como pertencendo a **classe positiva**, enquanto os demais serão definidos como sendo da **classe negativa**.

Como?



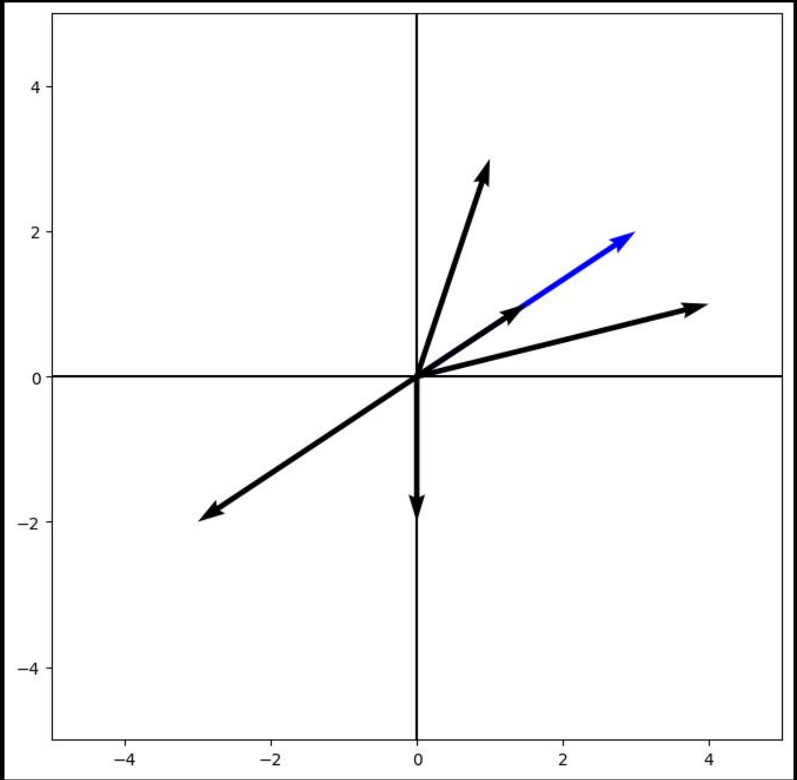
Fronteira

Basta realizar o produto escalar entre $\vec{w}$ e o vetor a ser testado $\vec{v}$.

Lembrando que o produto escalar pode ser calculado como:

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{v}$$

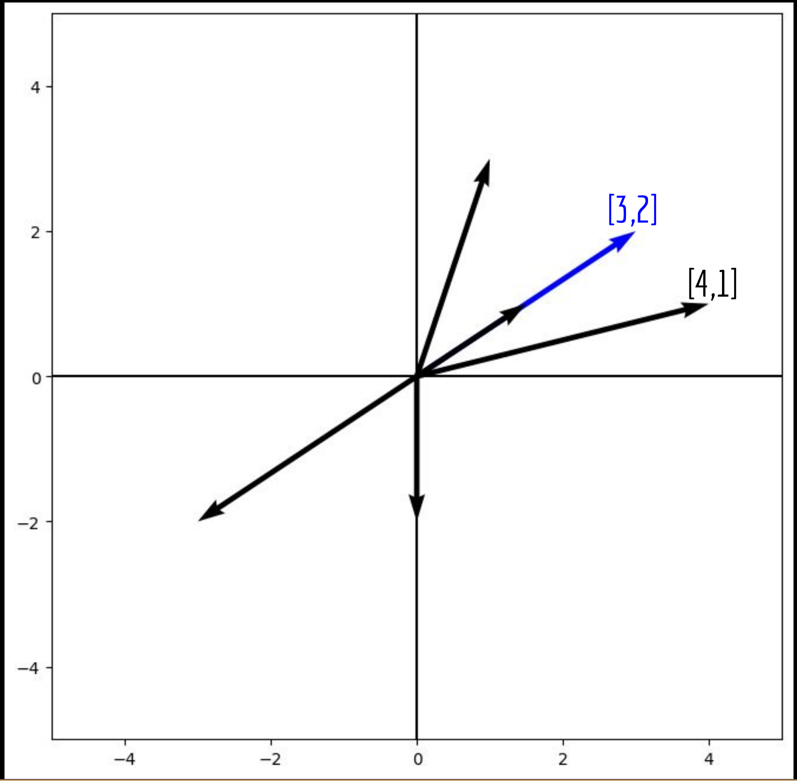
Se o resultado for positivo ou zero, significa que o vetor $\vec{v}$ é ortogonal, ou aponta para a mesma direção de $\vec{w}$.



Faça você mesmo

Considere $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e o vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a ser testado.

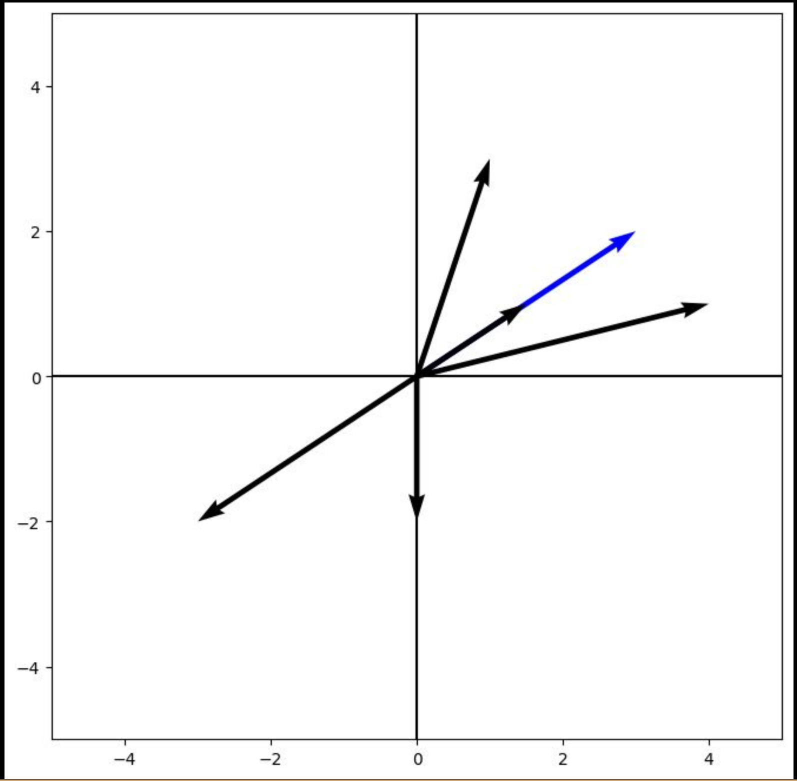
Calcule se o vetor $\vec{v}$ pertence a classe positiva ou negativa.



Fronteira

Podemos, então, criar um vetor $\vec{w}$ que separa os demais vetores entre classes positivas e negativas.

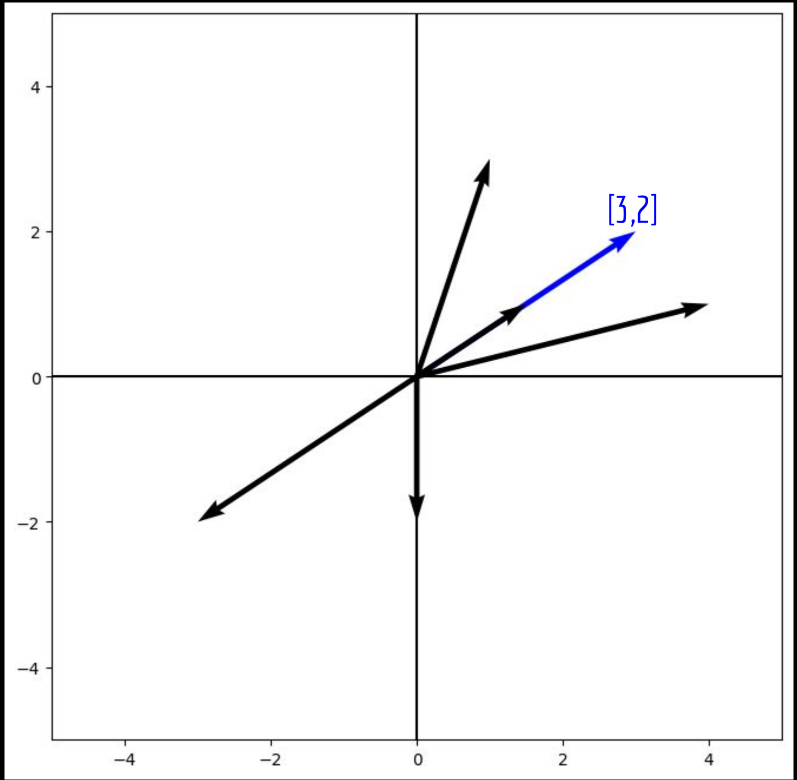
Para visualizar a fronteira de decisão, basta resolver a equação para “qualquer vetor $\vec{v}$”.



Fronteira

Exemplo, considerando $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{w}.\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

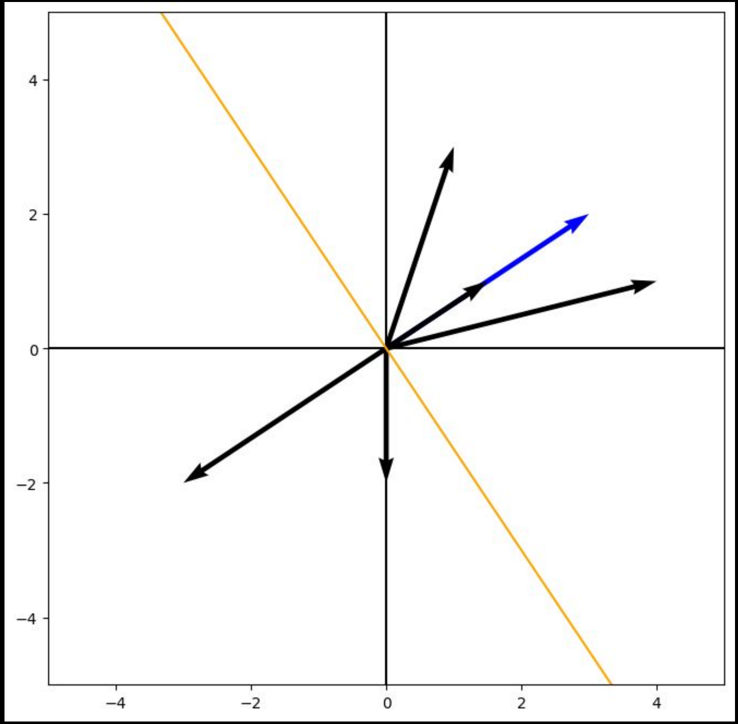


Fronteira

Exemplo, considerando $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{w}.\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

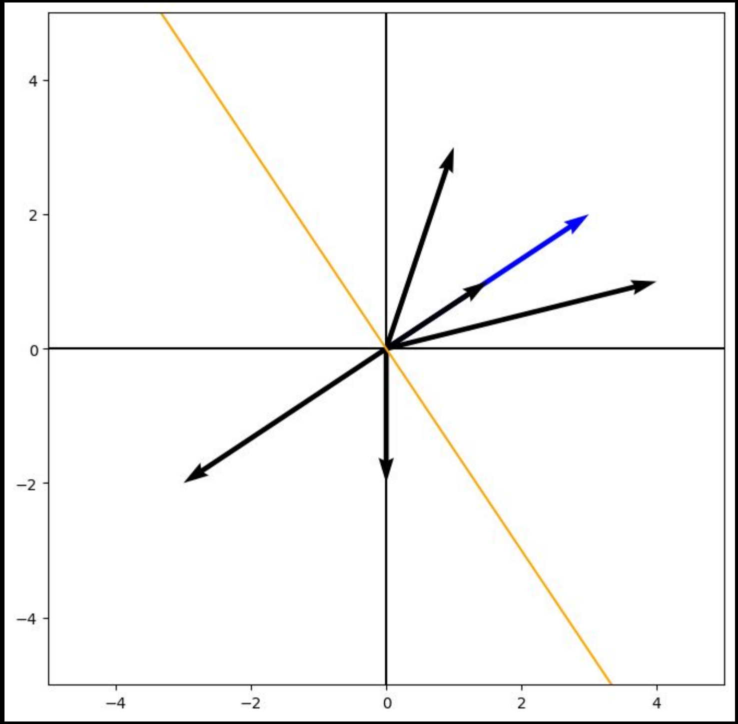
Resolvendo, temos a equação da reta $y \geq \dfrac{-3x}{2}$.



Fronteira

Essa reta é a **fronteira de decisão linear**, definida por $\vec{w}$.

Em $\mathbb{R}^2$ temos uma **reta**, em $\mathbb{R}^3$ uma **plano**, e em $\mathbb{R}^n, n > 3$, temos um **hiperplano**.



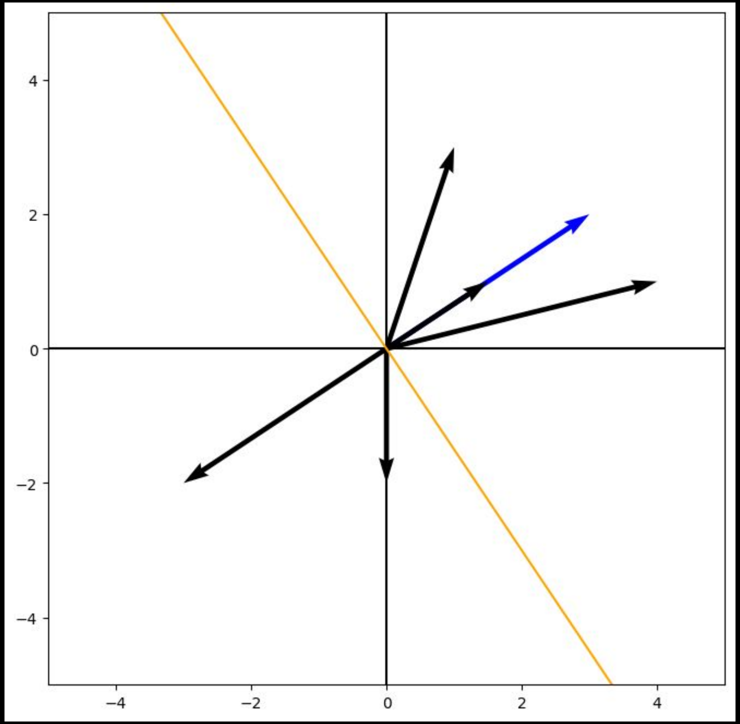
Problema

A fronteira de decisão passa pela origem.

Para resolver isso, podemos adicionar um parâmetro adicional *b*, que define um *bias* (viés).

No caso geral, em um plano $\mathbb{R}^n$, vamos definir $\vec{w}$ como contendo *n+1* componentes. O primeiro componente de $\vec{w}$ é o bias, que pode ser zero (nesse caso, a fronteira passa pela origem).

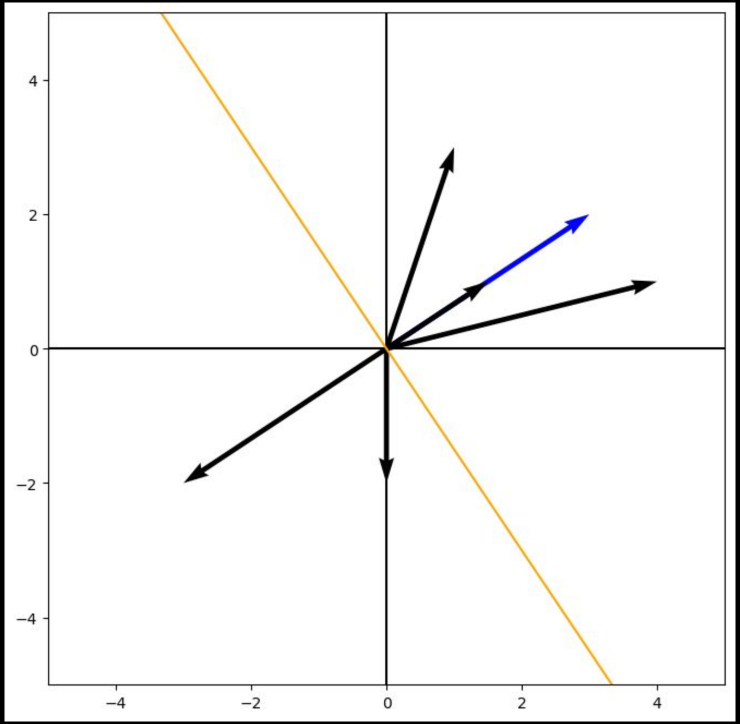
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$$



Problema

Vamos adicionar agora 1 em todo vetor $\vec{v}$ a ser testado, para levar em consideração o bias.

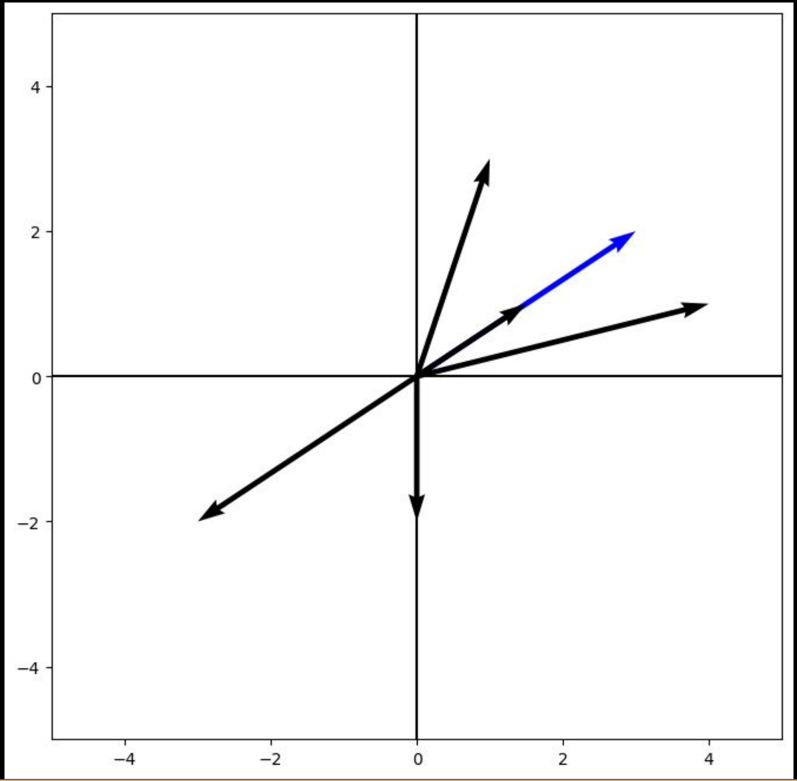
Os vetores ficarão na forma $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$.



Faça você mesmo #5

Considere $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e um bias 3.

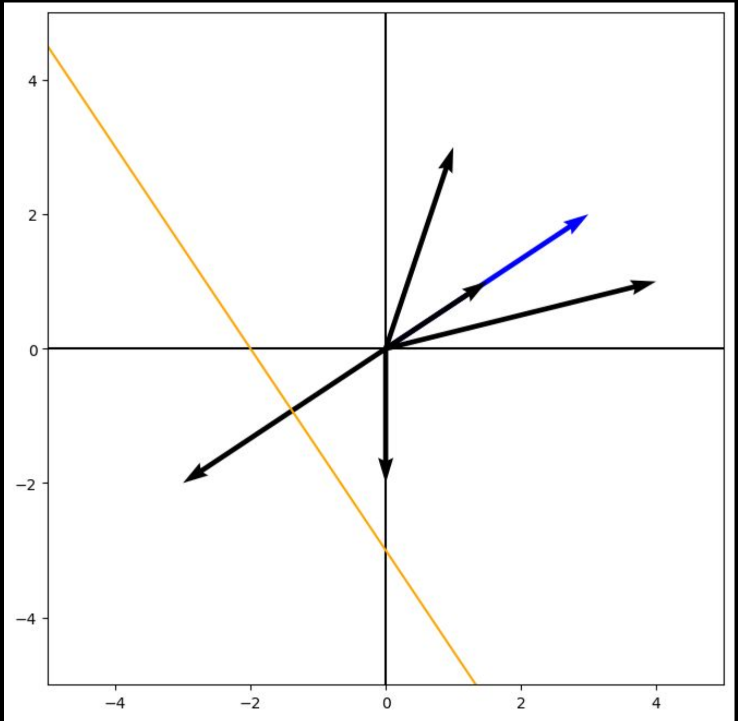
Como fica a fronteira de decisão? Quais vetores da imagem ao lado serão da classe positiva? E negativa?



Faça você mesmo #5

Considere $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e um bias 3.

Como fica a fronteira de decisão? Quais vetores da imagem ao lado serão da classe positiva? E negativa?



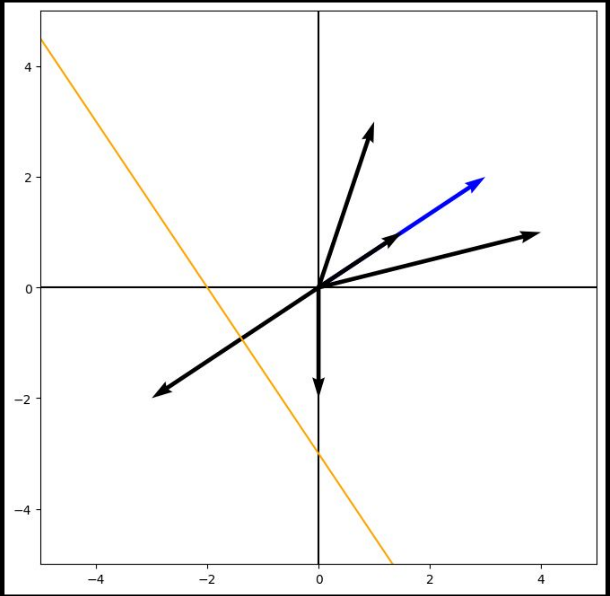
Princípio

Esse é um princípio utilizado por muitos dos modelos de Aprendizado de Máquina, incluindo redes neurais.

Definir uma fronteira de decisão para separar as classes.

Usar um vetor para definir a fronteira é a ideia por trás de um **Perceptron**, ou **neurônio artificial**.

A combinação de múltiplos perceptrons nos dá uma **rede neural**.



Curiosidade

Calcular o produto escalar em espaços de alta dimensão por ser computacionalmente caro.

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{v}$$

Note que são realizadas muitas operações simples (multiplicações e somas).

Por conta disso, modelos grandes geralmente utilizam hardwares especializados, como GPUs e TPUs para criar as fronteiras de decisão (em uma CPU podemos ainda usar instruções SIMD ou Vetoriais).

Hardwares capazes de paralelizar massivamente cálculos simples.

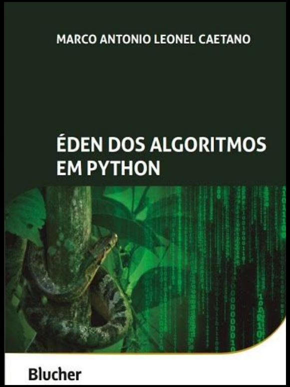
Veja uma introdução sobre como esse tipo de hardware pode acelerar os cálculos em prlalmeida.com.br/ci212-2022-01/Aula18GPUs.pdf

Exercícios

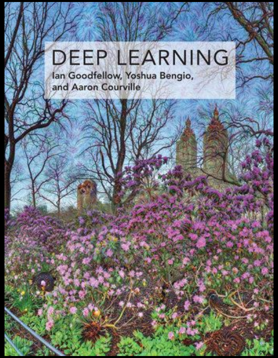
1. Assista a essa playlist: www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab
2. Entenda o dataset Iris Setosa, disponível em archive.ics.uci.edu/dataset/53/iris
   No código disponibilizado no Google Colab é carregada uma **versão simplificada** deste dataset.
   Seu objetivo é definir um vetor $\vec{w}$ que separa corretamente os vetores da classe *Iris Setosa* (classe positiva, em azul), da classe *Iris Versicolour* (classe negativa, em laranja). Defina $\vec{w}$ **manualmente** (chute valores até encontrar algum que faça sentido). Qual o valor de $\vec{w}$ que você encontrou?
   Essa fronteira de decisão poderá ser usada para **classificar novas plantas**! Se você medir as pétalas de uma planta, mas não souber se ela é uma Iris Setosa ou Iris Versicolour, basta usar sua fronteira de decisão para definir a classe dessa planta. Esse exercício demonstra a ideia por trás do **aprendizado supervisionado**.

Referências

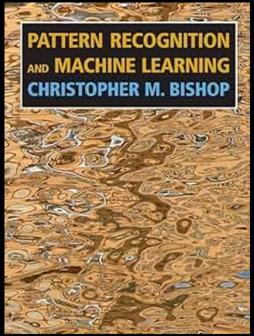
Caetano, M. Éden dos Algoritmos em Python. 2024.



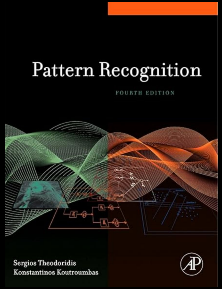
Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. Deep Learning. 2016.



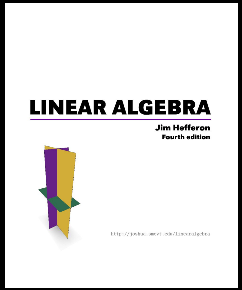
Bishop, C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. 2006.



Theodoridis, S., Koutroumbas, K. Pattern Recognition & Matlab Intro. 2010.



Hefferon, J. Linear Algebra. 2015.



Licença